SUJET N°1 Juin 2004 | NANCY-METS, BESANÇON, DIJON, GRENOBLE, LYON, REIMS, STRASBOURG

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explication, le barème en tiendra compte.

EXERCICE 1

Soient $A = \frac{9}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{11}{4}$ et $B = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + \sqrt{75}$.

1. Calculer A en détaillant les étapes du calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Calculer et écrire B sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers relatifs, b étant un nombre positif le plus petit possible.

EXERCICE 2

On considère l'expression $C = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 5)$.

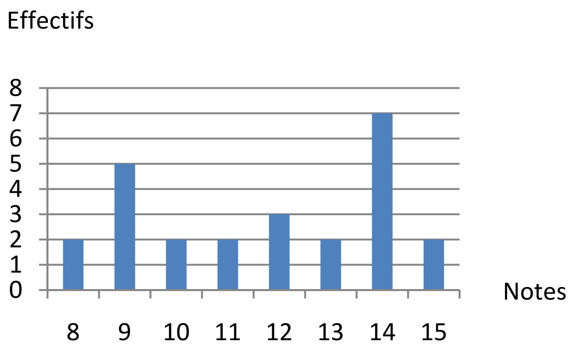
1. Développer et réduire l'expression C.
2. Factoriser l'expression C.
3. Résoudre l'équation $(2x - 1)(3x + 4) = 0$.

EXERCICE 3

1. Les nombres 682 et 352 sont-ils premiers entre eux ? Justifier.
2. Calculer le plus grand diviseur commun (PGCD) de 682 et 352.
3. Rendre irréductible la fraction $\frac{682}{352}$ en indiquant clairement la méthode utilisée.

EXERCICE 4

Le diagramme en barres ci-dessous donne la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques par les élèves d'une classe de troisième.



1. Combien y'a-t-il d'élèves dans cette classe.
2. Quelle est la note moyenne de la classe à ce contrôle ?
3. Quelle est la note médiane ?
4. Quelle est l'étendue de cette série de notes ?

Cette correction est rédigée bien plus que nécessaire et fait ressortir les propriétés utilisées. Elle a pour principal but d'être comprise facilement par l'étudiant. Dans une copie, il suffira de faire ressortir les étapes du calcul.

EXERCICE 1

Soient $A = \frac{9}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{11}{4}$ et $B = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + \sqrt{75}$.

1. Simplifions d'abord A :

$$A = \frac{9}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{11}{2 \times 2} = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} \times \frac{11}{2}$$

On a ensuite :

$$A = \frac{9}{5} - \frac{11}{10}$$

et en réduisant les deux fractions au même dénominateur :

$$A = \frac{18}{10} - \frac{11}{10}$$

soit :

$$\boxed{\boldsymbol{A = \frac{7}{10}}}$$

2. Ecrivons B sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers relatifs, b étant un nombre positif le plus petit possible.

$$B = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + \sqrt{75}$$

On remarque que $27 = 9 \times 3 = 3^2 \times 3$ et $75 = 25 \times 3 = 5^2 \times 3$. On a donc :

$$B = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3^2 \times 3} + \sqrt{5^2 \times 3}$$

Puis, comme, **si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont nombres positifs alors $\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}}$**, on a :

$$B = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3^2}\sqrt{3} + \sqrt{5^2}\sqrt{3}$$

$$B = 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{B = -2\sqrt{3}}}$$

On a donc bien écrit B sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers relatifs, b étant un nombre positif le plus petit possible, avec $a = -2$ et $b = 3$.

$\boxed{\text{EXERCICE 2}}$

On considère l'expression $C = (2x-1)^2 + (2x-1)(x+5)$.

1. Développons puis réduisons C.
   Pour développer $(2x-1)^2$, on utilise l'identité remarquable $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$. On a alors :

$$C = (4x^2 - 4x + 1) + (2x^2 + 10x - x - 5)$$

   d'où

$$\boxed{\boldsymbol{C = 6x^2 + 5x - 4}}$$

2. Factorisons l'expression C.
   On a :

$$C = (2x-1)^2 + (2x-1)(x+5) = (2x-1)(2x-1) + (2x-1)(x+5)$$

   Mettons $(2x-1)$ en facteur, en utilisant la **formule de la distributivité** $\boldsymbol{ab + ac = a(b+c)}$:

$$C = (2x-1)[(2x-1) + (x+5)]$$

   d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{C = (2x-1)(3x+4)}}$$

3. Résolvons l'équation $(2x-1)(3x+4) = 0$.
   On utilise la propriété : « **un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul** ».

   On a donc

$$2x - 1 = 0 \text{ ou } 3x + 4 = 0$$

   soit

$$2x = 1 \text{ ou } 3x = -4$$

   soit

$$x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{4}{3}$$

$$\boxed{\textbf{On conclut donc : les solutions de l'équation sont } \boldsymbol{\frac{1}{2}} \textbf{ et } \boldsymbol{-\frac{4}{3}}.}$$

$\boxed{\text{EXERCICE 3}}$

1. Les nombres 682 et 352 sont divisibles par 2.

$$\boxed{\textbf{Par conséquent, 682 et 352 ne sont pas premiers entre eux.}}$$

2. Calculons le PGCD de 682 et 352.
   On applique l'**algorithme d'EUCLIDE**.

$$682 = 1 \times 352 + 330$$

$$352 = 1 \times 330 + 22$$

$$330 = 15 \times 22 + 0$$

Le PGCD étant le **dernier reste non nul**, c'est 22.

$$\boxed{\textbf{Le PGCD de 682 et 352 est 22.}}$$

3. Rendons irréductible la fraction $\frac{682}{352}$.
   On a :

$$682 = 31 \times 22$$

et

$$352 = 16 \times 22$$

D'où :

$$\frac{682}{352} = \frac{31 \times 22}{16 \times 22} = \frac{31}{16}$$

$$\boxed{\frac{682}{352} = \frac{31}{16}}$$

EXERCICE 4

1. Le nombre N des élèves de cette classe est :

$$N = 2 + 5 + 2 + 2 + 3 + 2 + 7 + 2$$

soit

$$\boxed{N = 25}$$

2. La note moyenne m de la classe à ce contrôle est :

$$m = \frac{2 \times 8 + 5 \times 9 + 2 \times 10 + 2 \times 11 + 3 \times 12 + 2 \times 13 + 7 \times 14 + 2 \times 15}{25}$$

$$m = \frac{293}{25}$$

Donc

$$\boxed{m = 11,72}$$

3. Notons N la note médiane de cette série de notes.
   Par définition, **la médiane est la valeur qui partage la série statistique, rangée par ordre croissant ou décroissant, en deux parties de même effectif**.
   Dans le cas de la série étudiée, nous constatons que 11 élèves ont obtenu une note inférieure à 12 et que 11 élèves ont obtenu une note supérieure à 12. D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{M = 12}}$$

4. Déterminons l'étendue e de cette série de notes ?
   Par définition, **l'étendue est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série statistique**.
   Ici :

$$e = 15 - 8$$

   D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{e = 7}}$$