

ALBERTIN Thierry - CAVALLARO Jean-Sébastien - MARCHESE Emilie
1^{ère} S 3



LA PHYLLOTAXIE SPIRALE

Lycée Thierry MAULNIER
Année Scolaire : 2004-2005

Professeurs :
M. Gouy (S.V.T.)
M. Martinez (Mathématiques)

Sommaire

Introduction	3
I. La phyllotaxie	4
II. Les principes mathématiques	6
III. Observation, interprétation et modélisation de la phyllotaxie spirale	11
Conclusion	19
Lexique	20
Bibliographie	21

Introduction

Aristote et son disciple Théophrastus, et peut-être même les égyptiens avant eux (d'après les hiéroglyphes que l'on retrouve sur les murs de certains tombeaux), se sont les premiers intéressés à la forme des plantes.

La suite de Fibonacci a été définie au XIII^{ème} siècle, mais ce n'est que bien plus tard que le lien a été établi entre les spirales phyllotaxiques et la suite de Fibonacci.

C'est le botaniste Braun qui est à l'origine de cette observation, au XIX^{ème} siècle. Puis, lui ont succédé des mathématiciens et botanistes qui ont tenté de percer ce mystère. Ces deux approches, géométrique et biologique, ont permis de déterminer des règles simples qui expliquent les dispositions que l'on observe.

Mais qu'est-ce que la phyllotaxie et plus particulièrement la phyllotaxie spirale, quels sont les principes et les propriétés qui rentrent en jeu et à quoi sert-elle ?

I. La phyllotaxie

1. Définition

Le mot « phyllotaxie » vient du grec « phylle » qui signifie feuille et « taxon » qui se traduit par disposition ou ordre. Littéralement, la « phyllotaxie » est l'étude de la disposition des feuilles autour des branches, c'est-à-dire l'ordre dans lequel sont implantés les feuilles ou les rameaux sur la tige d'une plante, ou, par extension, la dispositions des éléments d'un fruit ou d'une fleur. Il s'agit donc d'une théorie qui propose l'idée d'une croissance ordonnée dans le méristème de la tige d'une plante. D'après cette théorie, les feuilles apparaissent suivant une séquence définissant divers types de dispositions d'ensemble.

2. Les différentes formes de phyllotaxie

Nous avons pu étudier les différentes formes de phyllotaxie en analysant les échantillons récoltés sur le terrain. On peut alors différencier plusieurs formes de phyllotaxies en fonction du nombre de feuilles par nœuds (sur les schémas, les feuilles grisées sont des feuilles inférieures et les feuilles blanches sont les plus hautes).

a) Une feuille par nœud

- Monostique : à partir de la première feuille, chaque feuille effectue une rotation de 360° . 
- Distique ou Alterne : l'angle entre chaque feuille est de 180° . 
- Tristique : l'angle entre chaque feuille est de 120° . 
- Spiralée : cette disposition sera l'objet de notre T.P.E.. 

b) Deux feuilles par nœud

- Opposées : chaque doublet de feuilles est disposé exactement au dessus du précédent. 
- Opposées-décussées : chaque doublet de feuilles effectue une rotation de 90° .



c) Trois feuilles par nœud ou plus

- Verticillées : ensemble de feuilles réuni au même niveau autour de la tige.



Nous nous intéresserons plus particulièrement à la phyllotaxie spirale.

3. La disposition en spirale

Comme son nom l'indique, la phyllotaxie spirale est l'étude des plantes ayant leurs feuilles qui s'insèrent en spirale le long de la tige.

Deux critères définissent cette disposition :

- l'écart angulaire entre deux feuilles successives spécifique à cette phyllotaxie.
- le nombre de spirales évidentes, appelées parastiches (ou parastiques), le long desquelles les feuilles suivent leur croissance.

On constate alors, en observant la nature, que la plupart des végétaux présentent des spirales.

On peut les voir sur :

- les tournesols
 - les pommes de pins
 - les ananas
 - les artichauts
 - les palmiers
 - les marguerites
 - les yuccas
- etc...

La phyllotaxie spirale est basée sur des règles géométriques simples qui découlent de la façon dont les cellules s'organisent à chaque division au niveau du méristème apical. La disposition régulière, quasi mathématique, des ébauches foliaires est calée sur la suite de Fibonacci, du nom du mathématicien italien qui le premier a décrit les propriétés particulières de cette suite.

II. Les principes mathématiques

1. Analyse des échantillons



Photo 1



Photo 2

Sur cette pomme de pin, nous avons compté le nombre de spirales tournant dans un sens puis le nombre de celles tournant dans le sens opposé. La photographie n°1 nous montre qu'il y a 8 spirales tournant dans ce sens et la photographie n°2 montre 13 spirales tournant dans le sens opposé.



Photo 3

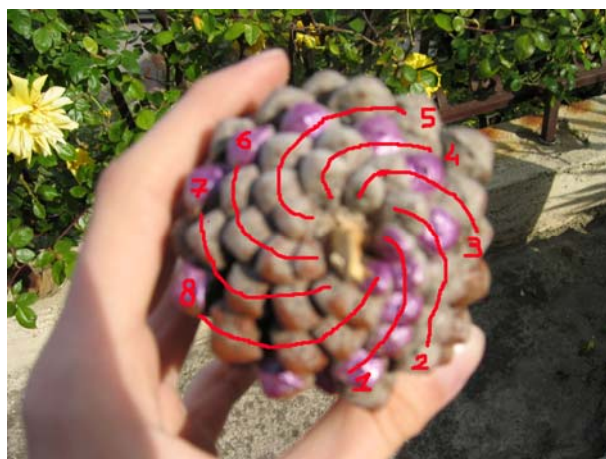
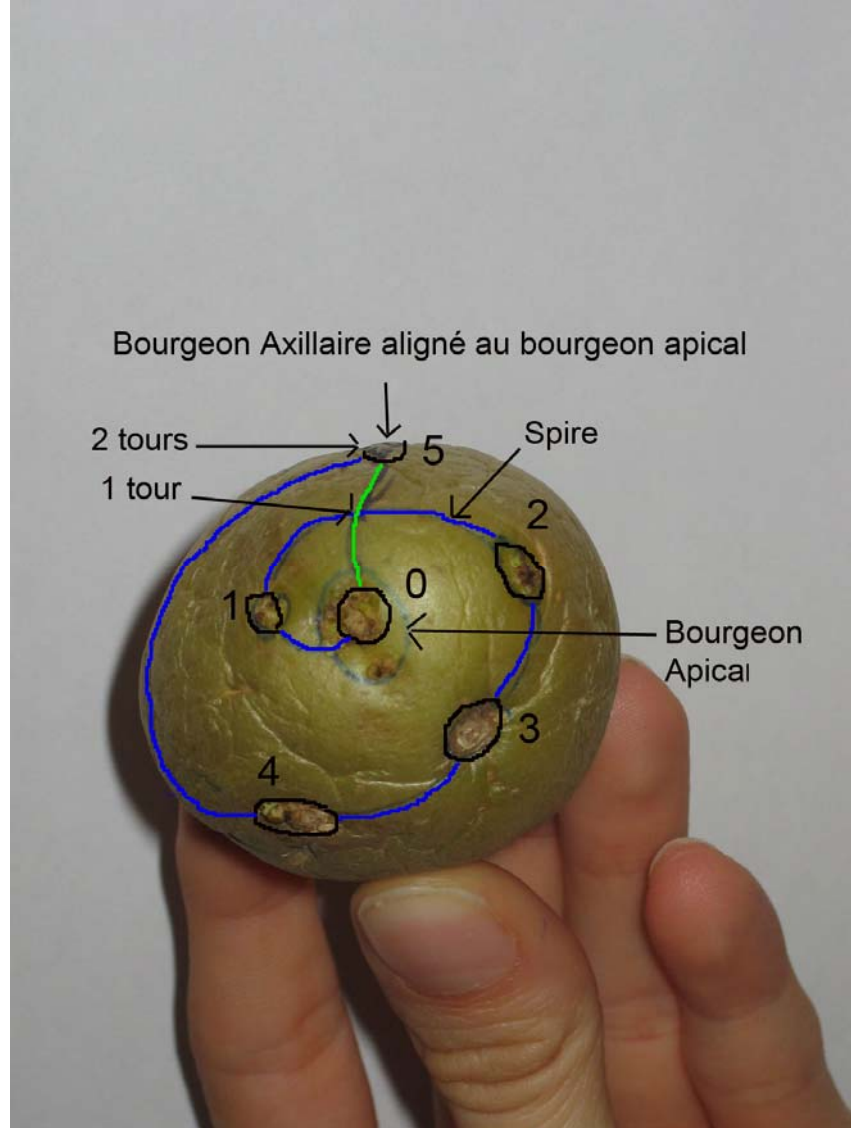


Photo 4

Cette pomme de pin, qui provient d'un pin d'une espèce différente, présente 5 spirales tournant dans un sens et 8 tournant dans l'autre.

Sur d'autres végétaux, comme l'ananas nous avons aussi trouvé 8 spirales tournant dans un sens et 13 dans l'autre.

Le tournesol présente 3 types de spirales. On peut en compter 21, 34 et 55.



Quand on regarde une pomme de terre, en prenant pour base le bourgeon terminal, on remarque qu'après un certain nombre de tours de spires un bourgeon axillaire se retrouve exactement au-dessous du premier. On ne compte pas le bourgeon apical c'est le numéro 0.

On peut alors :

- compter le nombre de bourgeons situés après le premier jusqu'à parvenir au bourgeon qui est exactement aligné avec le premier. On note alors x la valeur trouvée.
- compter le nombre de tours que fait la spire génératrice entre ces deux bourgeons de référence : la valeur trouvée est appelée y .

Pour notre pomme de terre nous trouvons $x = 5$ et $y = 2$. Or nous pouvons remarquer que le rapport y/x correspond à la fraction phyllotaxique qui permettra de calculer l'angle de divergence entre deux feuilles consécutives. Cela sera étudié dans le tableau du paragraphe 4.

2. Exploitation des résultats

Le nombre de spirales comptés sur les échantillons récoltés sont les premiers termes de la suite 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... dont un terme s'obtient en additionnant les deux termes précédents. Cette suite porte le nom de **Leonardo Pisano** (1170-1270) dit **Fibonacci**. Il publie en 1202 son livre Liber Albaci, où il solutionne le «problème des lapins», fameux entre les mathématiciens de l'époque. Il modélise grossièrement la croissance des lapins selon la loi :

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n, \text{ (U le nombre de lapin le } n^{\text{ème}} \text{ mois).}$$

Cette suite de récurrence a pour premier terme $U_0 = 0$ et $U_1 = 1$. Nous pouvons noter la particularité de cette suite qui nécessite de connaître les deux premiers termes.

Cette suite est aussi définie par une relation qui donne le terme général F_n :

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

On remarque également que le rapport entre deux termes consécutifs de la suite : U_{n+1}/U_n tend vers le nombre d'or, lorsque les deux termes tendent vers plus l'infini.

Le nombre d'or est un nombre irrationnel comme π ($\pi \approx 3,1416$). Le nombre d'or, ou Phi de symbole ϕ (abréviation de **Phidias**, le célèbre sculpteur grec qui utilisait ce nombre pour définir les proportions harmonieuses de ses statues), est égal à 1,61803... ou encore : $(1+\sqrt{5})/2$.

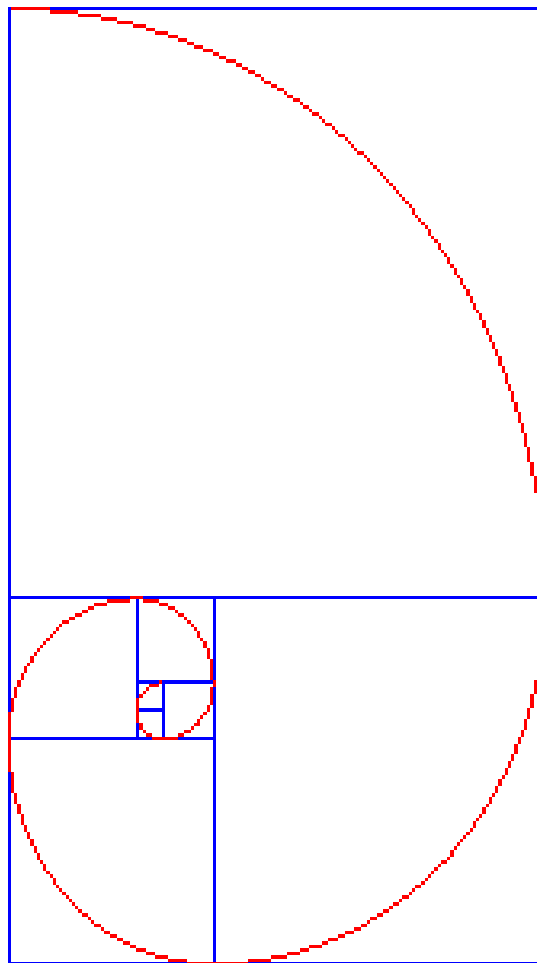
Par exemple, pour la pomme de pin, on a : $8/5 = 1.6$ ou encore $13/8 = 1.625$. On peut remarquer que plus on s'élève dans la série de Fibonacci et plus le rapport de deux termes consécutifs tend vers ce nombre d'or.

Ce nombre d'or intervient dans la spirale logarithmique et dans la recherche de l'angle de divergence.

3. La spirale logarithmique

La spirale logarithmique est très certainement la spirale la plus connue de toutes, dû à son esthétique. Il existe différentes méthodes pour faire sa construction graphique, à partir des termes de la suite de **Fibonacci**. (Nous n'étudierons que les carrés de **Fibonacci**)

Nous commençons à tracer deux carrés de côté 1 ayant une arrête commune, puis un carré de côté 2 à partir des ces deux premiers carrés. De même nous construisons un quatrième carré de côté 3 à partir d'un des carrés de côté 1 et celui de côté 2. Et ainsi nous pouvons construire un carré de côté 5 puis un autre de côté 8, 13, 21, etc.... Nous parlons de carrés qui ont des côtés correspondant à un terme de la suite. Plus simplement, on part d'un rectangle de Fibonacci, avec $AB = U_{n-1}$ et $BC = U_n$, où U_{n-1} et U_n sont deux nombres consécutifs de la suite de **Fibonacci**. Par la suite nous traçons la spirale en reliant une des extrémités de chaque carré.



4. Angle de divergence

Toutes les plantes à phyllotaxie de type "spirale" ont des fractions égales à $1/2$, $1/3$, $2/5$, $3/8$, $5/13$, $8/21$...

On remarque alors que les numérateurs et dénominateurs de toutes les fractions appartiennent à la suite de **Fibonacci**.

Rapportées à 360° , les fractions phyllotaxiques (FP) correspondent à des angles entre feuilles, écailles ou bourgeons axillaires consécutifs sur une même spire génératrice (voir tableau). Cette série de nombre peut se prolonger indéfiniment et tend alors vers l'angle **$137^\circ 30' 28''$** , qui a les propriétés du nombre d'or Phi.

1)	Fraction phyllotaxique (FP)	$1/2$	$1/3$	$2/5$	$3/8$	$5/13$	$8/21$	$13/34$	4181 / 10946	39088169 / 102334155
2)	Angle entre deux feuilles (A) degrés	180°	120°	144°	135°	$138^\circ 28'$	$137^\circ 06'$	$137^\circ 39'$	$137^\circ 31'$	$137^\circ 30' 28'' =$ angle d'or

Avec : (1) $FP = y/x$;

(2) $A = 360^\circ \times FP$, exprimé en d,m,s ;

En effet nous avons pu constater sur une plante grasse que les feuilles étaient disposées sous forme de spirale et que l'angle de divergence entre deux feuilles consécutives était de 137° . (voir photo)

Mais pourquoi retrouve-t-on ces principes mathématiques, le nombre d'or et l'angle d'or sur les végétaux ?

III. Observation, interprétation et modélisation de la phyllotaxie spirale

A / Observation de l'angle d'or et modèle de croissance

Nous avons vu dans la partie II que dans le cas d'une phyllotaxie spirale, l'angle de divergence entre 2 feuilles est l'angle d'or. Nous allons maintenant l'observer sur des végétaux et établir un modèle de croissance d'une plante à phyllotaxie spirale.

1. Exemples végétaux

- **DOCUMENT A** (photos de plantes ayant une phyllotaxie spirale prises dans la nature)





La mesure moyenne des angles entre deux feuilles consécutives est de 138.5° pour les plantes de ce document, valeur très proche 137.51° , l'angle d'or. Cependant certaines mesures s'écartent beaucoup de cette moyenne, mais elles sont dues au fait que les plantes ont été gênées dans leur croissance soit par d'autres plantes, soit par des objets proches (on le voit sur la plante de la photo 5, gênée par un piquet en bois). C'est pourquoi le léger écart avec l'angle d'or est négligeable.

- **DOCUMENT B** (plante prise dans la nature)

- 1) vue de dessus
- 2) vue de côté

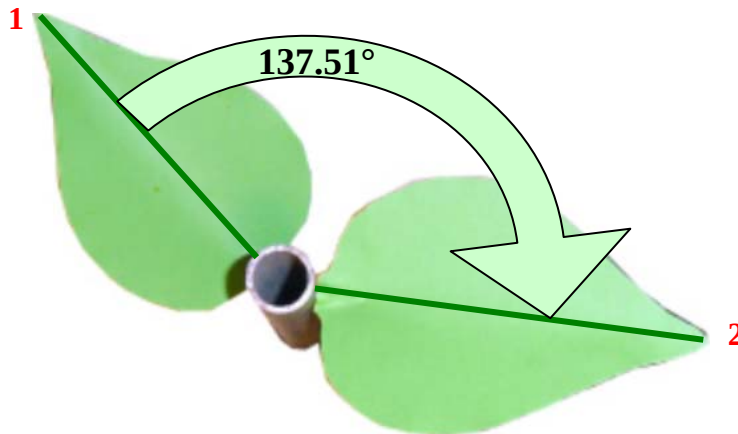


La mesure des angles entre deux feuilles consécutives donne en moyenne 139.6° pour cette plante, angle toujours très proche de l'angle d'or. Mais chaque feuille qui apparaît ne subit pas seulement une rotation de 137.51° , elle subit aussi une translation vers le haut d'une hauteur qui est l'entre-noeud. Comme on le voit sur la photo 2, cet entre-noeud n'est pas constant, il dépend du stade de croissance de la plante mais aussi de l'espèce.

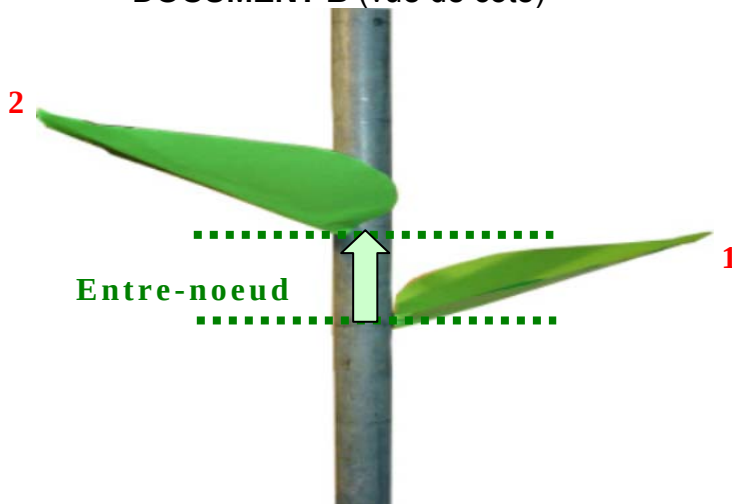
2. Modèle explicatif de la disposition des feuilles

Pour nous permettre de synthétiser nos informations, nous avons réalisé un modèle constitué d'une tige métallique et de feuilles cartonnées collées à des aimants. Ce système permet de pouvoir modifier l'emplacement des feuilles selon différentes phyllotaxies pour nos expériences.

- **DOCUMENT A** (vue de dessus)



- **DOCUMENT B** (vue de côté)



Pour clarifier les informations contenues dans ce document, nous avons réalisé un découpage à l'aide du logiciel de traitement d'images Microsoft Picture It. On peut ainsi voir sur le modèle de phyllotaxie spirale que chaque feuille qui apparaît subit une rotation de 137.51° tout en s'élevant de la hauteur de l'entre-noeud par rapport à la précédente. Cet entre-noeud dépend de l'espèce considérée : certaines, comme la plante n°3 du **DOCUMENT A** du **A/ 1.** ont un entre-noeud élevé, d'autres comme la plante n°8 ont un entre-noeud presque nul. Cela n'est que l'expression du génotype propre à chaque espèce. En revanche nous ne pouvons définir de sens de rotation : toujours sur le même

document, sur la plante n°4, pour passer d'une feuille à la suivante, on tourne dans le sens opposé des aiguilles d'une montre, tandis que sur la photo 5, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. De plus, nous avons également pu observer des sens de rotation différents chez une même espèce.

B/ Une disposition utile pour la plante

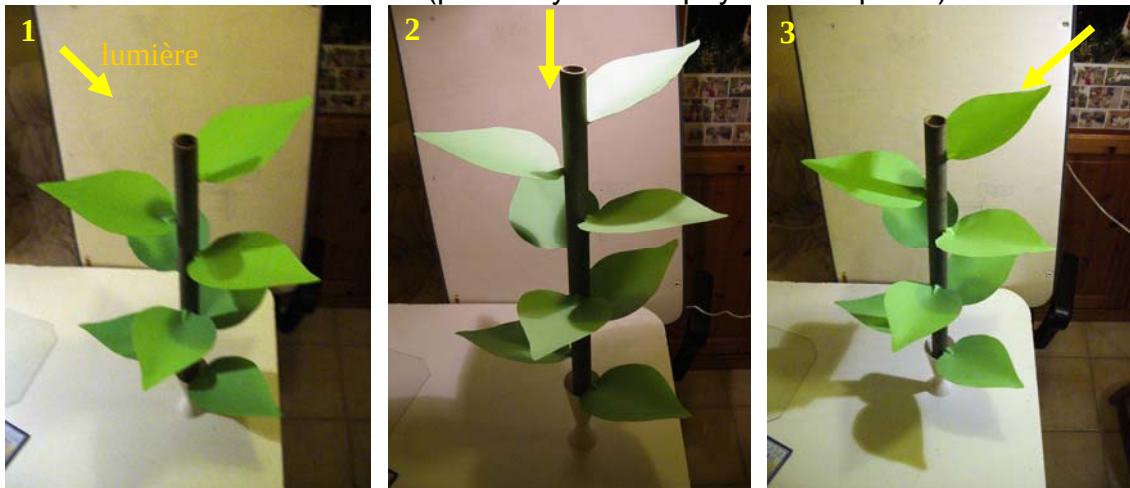
La phyllotaxie spirale est très répandue chez les végétaux car elle a plusieurs avantages pour la plante. Nous allons comparer grâce à notre modèle différentes phyllotaxies pour constater que la phyllotaxie en spirale est celle qui cumule le plus d'avantages pour la plante.

1. La photosynthèse est optimisée

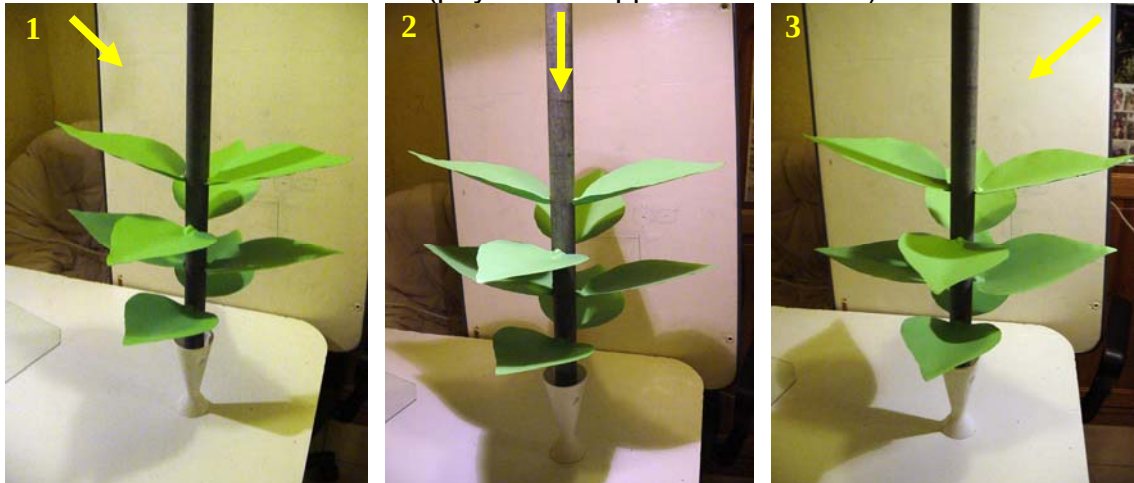
a) Optimisation de la réception d'énergie lumineuse

Dans cette expérience, nous avons photographié notre modèle avec quatre phyllotaxies différentes dont la phyllotaxie spirale et à chaque fois pour trois positions du soleil simulées grâce à une lampe. Il faut préciser que nous avons pris soin de ne pas utiliser le flash de l'appareil photo pour ne pas fausser les résultats mais seulement la lampe représentant le soleil et une lumière ambiante faible et non significative.

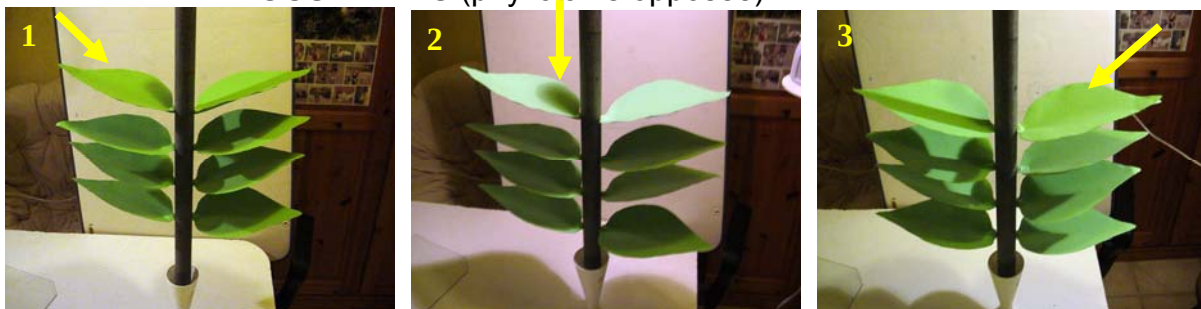
- **DOCUMENT A** (plante ayant une phyllotaxie spirale)



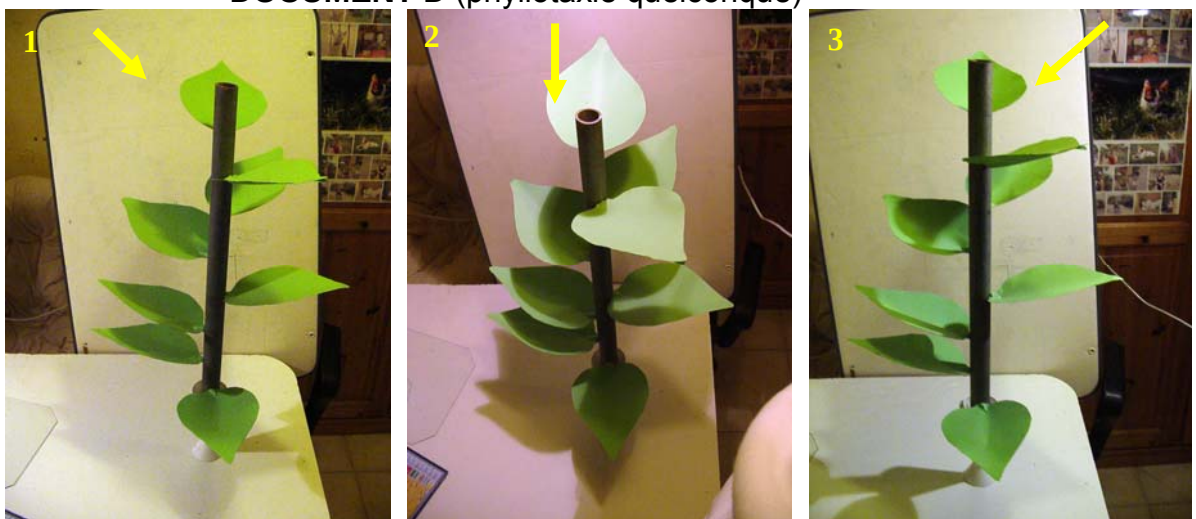
- **DOCUMENT B (phyllotaxie opposée-décussée)**



- **DOCUMENT C (phyllotaxie opposée)**



- **DOCUMENT D (phyllotaxie quelconque)**

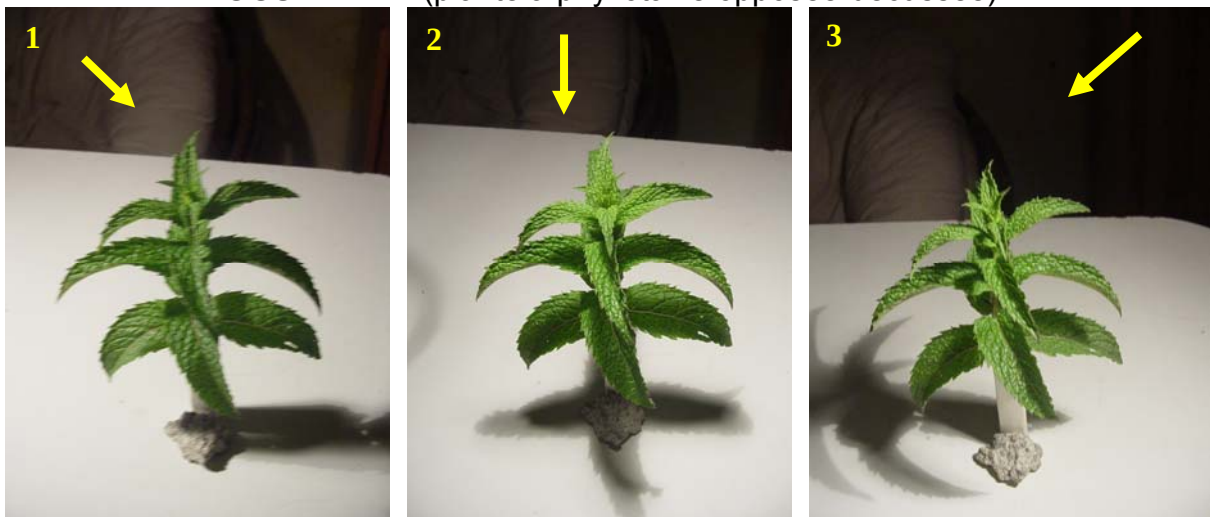


Comme on le voit sur ces documents, pour les phyllotaxies spirale et opposée-décussée et quelle que soit la position du soleil, les feuilles ne se font que très peu d'ombre. La phyllotaxie opposée-décussée est une autre solution pour optimiser la collecte de lumière (c'est pourquoi elle est aussi très répandue) mais nous allons voir plus tard que la phyllotaxie spirale a d'autres avantages que n'a pas la phyllotaxie opposée-décussée. Pour mieux les comparer, nous avons réalisé la même expérience sur deux vraies plantes ayant une phyllotaxie spirale et opposée-décussée.

• **DOCUMENT E** (plante à phyllotaxie spirale)

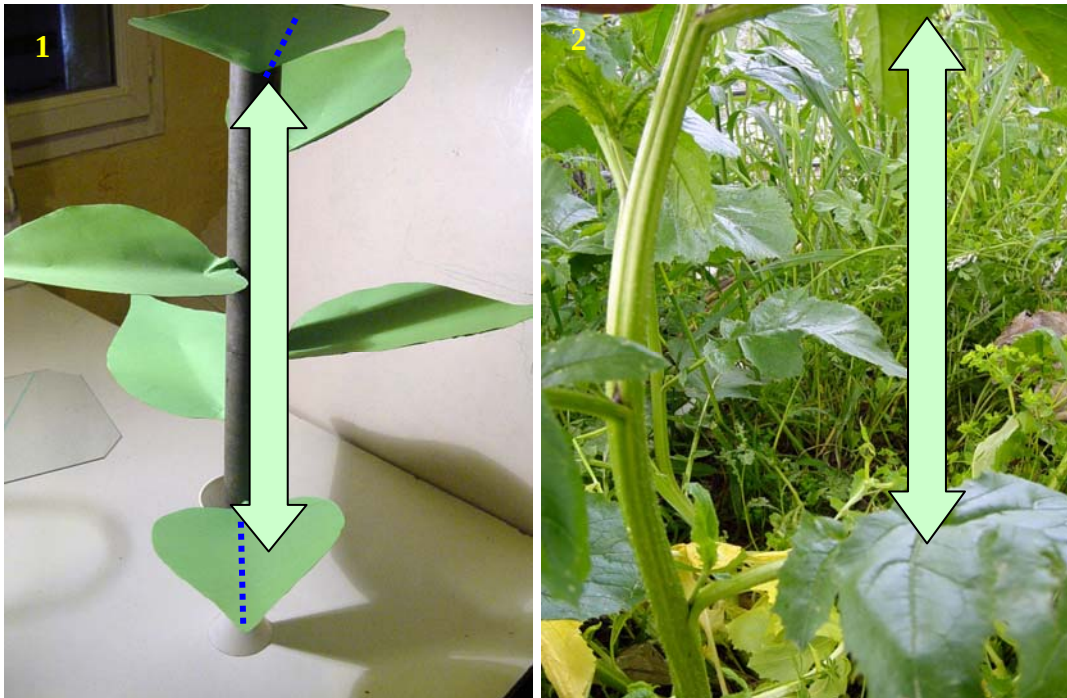


• **DOCUMENT F** (plante à phyllotaxie opposée-décussée)



On ne peut pas vraiment dire quelle est la meilleure au point de vue de la collecte de lumière d'autant plus que nous ne disposons pas de matériel suffisamment précis pour réaliser des mesures acceptables.

b) Meilleure aération

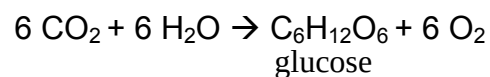


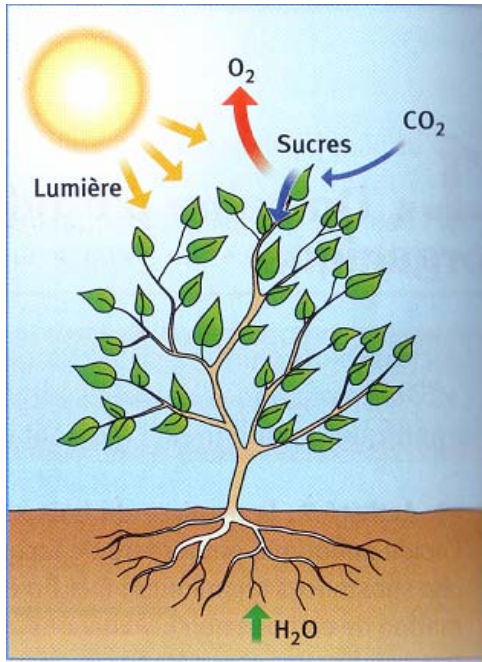
On le voit sur le modèle et sur la photo, chaque feuille n'a pas d'autre feuille proche directement au dessus d'elle. Le volume d'air dont dispose chaque feuille est donc supérieur dans le cas d'une phyllotaxie spirale. Cependant il convient de nuancer notre constatation car généralement sur toutes les phyllotaxies, chaque feuille dispose d'un volume d'air moindre mais suffisant. Mais pour certaines plantes ayant un entre-noeud faible comme la plante de la photo n°8 du **DOCUMENT A** du **A/ 1**, la disposition en spirale permet réellement une meilleure aération.

c) La photosynthèse est ainsi optimisée

La photosynthèse est une réaction vitale pour la plante car elle permet à celle-ci de synthétiser de la matière organique.

La plante peut ainsi produire du glucose selon l'équation suivante :





Cette réaction ne s'effectue qu'en présence d'énergie lumineuse fournie par le soleil (voir schéma ci-contre).

En optimisant la collecte de lumière des feuilles et l'aération de celles-ci pour mieux capter le dioxyde de carbone de l'air, la plante ayant une phyllotaxie spirale optimise sa photosynthèse.

2. De meilleures conditions pour le développement des bourgeons axillaires chez les plantes à fleurs

a) pour assurer la photosynthèse

Pareillement aux feuilles, les bourgeons axillaires recevront plus de lumière et disposeront de plus d'air pour assurer leur photosynthèse dans le cas d'une phyllotaxie spirale.

b) pour leur développement



Une plante à fleur ayant une phyllotaxie spirale permet à ses bourgeons axillaires de bénéficier du maximum d'espace pour se développer et donner une tige feuillée.

Comme on le voit sur le montage et la photo ci-dessus, chaque feuille n'a pas d'autre feuille disposée au-dessus d'elle. Ainsi, une tige peut se développer sans être gênée dans sa croissance par une autre feuille.

ATTENTION ! Il convient de faire la différence entre les plantes autotrophes et hétérotrophes puisque ce sont seulement les plantes autotrophes qui sont capables de produire de la matière organique à partir de matière minérale. L'optimisation de la photosynthèse n'est donc valable que pour les plantes autotrophes.

Conclusion

Ce T.P.E. nous a donc permis d'étudier la Phyllotaxie Spirale dans les deux disciplines proposées, à savoir les S.V.T. et les Mathématiques.

Cette disposition en spirale se trouve sur la plupart des végétaux que l'on peut observer dans la nature. On s'est aperçu que des principes mathématiques pouvaient s'appliquer à ce type de phyllotaxie. En effet, la suite de Fibonacci, le nombre d'or et l'angle d'or interviennent dans cette disposition.

Ce T.P.E. sur la phyllotaxie renforce aussi l'idée qu'une grande partie de la morphogenèse est basée sur des règles simples d'auto-organisation qui permettent une photosynthèse optimale.

Lexique

- Autotrophe : se dit d'organismes (les végétaux verts et certaines bactéries) capables de se développer à partir des seuls éléments minéraux (par opposition hétérotrophe).
- Bourgeon apical : bourgeon situé à l'extrémité de la tige.
- Bourgeon axillaire : bourgeon situé à l'aisselle du point d'intersection de la feuille.
- Entre-nœud : segment de tige compris entre deux nœuds successifs.
- Hétérotrophe : se dit d'un être vivant qui se nourrit de substances organiques, comme les animaux et la plupart des plantes dépourvues de chlorophylle.
- Méristème : du grec meristos = partagé, tissu végétal formé de cellules indifférenciées, siège de nombreuses divisions, situé à l'extrémité des tiges et des racines, et qui contribue à la croissance de la plante.
- Nœud : point d'une tige d'où se détachent des organes latéraux (feuille, rameau)
- Parastique (ou parastiche) : hélice foliaire.

Bibliographie

Sites Internet :

- La phyllotaxiespirale [En Ligne] :
<http://tpe.caracas.free.fr/gr04/spirales.pds>

- Le nombre d'or dans la nature [En Ligne] :
<http://www.lenombredor.free.fr/nature.htm>

- La phyllotaxie spirale [En Ligne] :
<http://www.unice.fr/LEML/cours/JDL/tp/tp3.htm>

Encyclopédie Axis

Dictionnaire Petit Larousse 1999

Manuel Sciences de la Vie et de la Terre Première S, programme 2001, BORDAS

Manuel Chimie Première S, Collection Parisi, BELIN