- Cours d'électromagnétisme -

Propagation libre dans un plasma

1 Equations de Maxwell notation complexe

On s'intéresse à des O.P.P.H. (dites aussi O.P.P.M.) telles que[1] :

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\right)$$

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

$$\vec{B} = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{B}}\right)$$

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\overrightarrow{B_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

En général, $\vec{k} \in \mathbb{C}^3$,

$$\vec{k} = \overrightarrow{k'} + \mathbf{i}\overrightarrow{k''}$$

avec $\overrightarrow{k'} \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{k''} \in \mathbb{R}^3$.

Eventuellement :

$$\rho = \mathrm{Re}\left(\underline{\rho}\right)$$

$$\underline{\rho} = \underline{\rho_0}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

$$\vec{J} = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{J}}\right)$$

$$\underline{\vec{J}} = \underline{\overrightarrow{J_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

Equations de MAXWELL :

[1] Dans tout ce document, **i** désigne le nombre tel que $\mathbf{i}^2 = -1$.

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \ \mathbf{i}\vec{k}.\underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \rightarrow \ \mathbf{i}\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow \ \mathbf{i}\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \mathbf{i}\omega\underline{\vec{B}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \rightarrow \ \mathbf{i}\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{J}} - \mathbf{i}\varepsilon_0\mu_0\omega\underline{\vec{E}}$$

2 Application à un plasma

2.1 Propriétés du plasma étudié

Le programme impose des limitations :

Soit un ensemble de charges :
- électrons : m, $-e$ ($e = 1{,}6.10^{-19}$ C),
- ions : M, Ze (pour simplifier, par la suite, on prendra $Z = 1$).

L'ensemble étant globalement neutre, et pouvant recéler des molécules neutres :

1. **On néglige le mouvement des ions par rapport au référentiel d'étude : ions fixes.**

Pourquoi ?

- Force (électrique éventuellement) sur un électron :

$$\vec{F_e} = m\vec{a_e} = -e\vec{E}(\vec{r},t)$$

- Force (électrique éventuellement) sur un ion (avec $Z = 1$) :

$$\overrightarrow{F_{\text{ion}}} = M\overrightarrow{a_{\text{ion}}} = -e\vec{E}(\vec{r},t)$$

La taille du volume $d\tau$ est telle que :

$$d\tau \ll \lambda^3$$

avec λ la longueur d'onde de l'O.P.P.H..

En conséquence, les charges « voient » toutes les mêmes champs :

$$\begin{cases}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{cases}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{a_{\text{ion}}}\|}{\|\overrightarrow{a_e}\|}=\frac{m}{M}$$

On pourra effectivement dire que les ions sont « fixes » si $M \gg m$.

2. Le plasma est suffisamment dilué.

Cela implique quoi ?

Mouvement d'un des électrons dans $d\tau$:

$$m\frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt}=-e\left(\vec{E}(\vec{r},t)+\vec{v}(\vec{r},t)\wedge\vec{B}(\vec{r},t)\right)-\frac{m\vec{v}(\vec{r},t)}{\tau}+\vec{f}_{\text{pression}}$$

C'est le terme en $-\frac{m\vec{v}(\vec{r},t)}{\tau}$ que l'on veut négliger, τ étant la durée moyenne entre deux collisions.

Pour un milieu suffisamment dilué, on aura τ suffisamment grand pour pouvoir négliger ce terme (en pratique, il faudra comparer τ à $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Remarque :
Pour un plasma « froid », on pourra également négliger $\vec{f}_{\text{pression}}$.

$$\vec{f}_{\text{pression}}=-\frac{\overrightarrow{\text{grad}}P(\vec{r},t)}{n(\vec{r},t)}$$

3. Les interactions électromagnétiques entre les charges sont négligées.

Conséquences :

– On pourra considérer le plasma électriquement neutre en tout point (électroneutralité « locale ») :

$$\boldsymbol{\rho(\vec{r},t)\approx 0}$$

– Les seuls champs agissant sur les charges sont ceux de l'onde.

Attention : vérifier si absence de champs statiques ou stationnaires.

La relation de conductivité se simplifie :

$$m\frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = m\frac{\partial\vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} = e\vec{E}(\vec{r},t)$$

(on néglige la force magnétique)

$$\rho(\vec{r},t) = n_{ions}e + n_{e^-}(-e) \approx 0 = n_0 \text{ constant}$$

d'où :

$$n_{e^-}(\vec{r},t) \approx n_0$$

avec n_0 le nombre d'électrons par m^3.

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_k n_k q_k \overrightarrow{v_k} = -n_0 e\vec{v}(\vec{r},t)$$

Remarque :
Grâce à $n_{e^-}(\vec{r},t) \approx n_0$, on a une relation linéaire.

Pour

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

$$m\frac{d\underline{\vec{v}}}{dt} = -e\underline{\vec{E}} = -e\underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

On a évidemment $\underline{\vec{v}}$ de la forme :

$$\underline{\vec{v}} = \underline{\overrightarrow{v_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

ce qui conduit à

$$-\mathbf{i}m\omega\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$$

$$\underline{\vec{v}} = \frac{e\underline{\vec{E}}}{\mathbf{i}m\omega}$$

D'où

$$\underline{\vec{j}} = -n_0 e \underline{\vec{v}} = -\frac{n_0 e^2}{\mathbf{i} m\omega} \underline{\vec{E}}$$

$$\boldsymbol{\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma \vec{E}}}$$

avec[2]

$$\boldsymbol{\underline{\sigma} = \frac{\mathbf{i} n_0 e^2}{m\omega}}$$

qui est un imaginaire pur fonction de ω.

2.2 Equations de propagation et dispersion

Rappel :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\overrightarrow{B_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

avec

$$\vec{k} = k\vec{u}$$

et en général

$$\vec{k} = \overrightarrow{k'} + \mathbf{i}\overrightarrow{k''}$$

pour une O.P.P.H. homogène.

Equations de MAXWELL :

$$\mathbf{i}\vec{k}.\underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0} = 0$$

car dans ce milieu $\rho = 0$.

$$\mathbf{i}\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$$

$$\mathbf{i}\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \mathbf{i}\omega\underline{\vec{B}}$$

[2] Multiplier au numérateur et au dénominateur par **i** dans $\underline{\vec{j}} = -\frac{n_0 e^2}{\mathbf{i} m\omega}\underline{\vec{E}}$.

$$\mathbf{i}\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\sigma} \underline{\vec{E}} - \mathbf{i}\omega\varepsilon_0\mu_0 \underline{\vec{E}} = -\mathbf{i}\omega\mu_0\varepsilon^* \underline{\vec{E}}$$

avec ε^* la *permittivité complexe* du milieu[3].

On trouve :

$$\varepsilon^* = \left(1 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}\right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon^* = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$$

en posant

$$\boldsymbol{\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}}}$$

la *pulsation plasma*, exprimée en $\mathrm{rad.\,s^{-1}}$.

On pose :

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$$

Remarques :

– Partons de

$$\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

qui est linéaire, donc on passe par $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{div}\underline{\vec{j}} + \frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} = 0$$

avec

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}}$$

[3] Attention : la notation « * » ne signifie pas ici « conjugaison complexe ».

d'où

$$\underline{\sigma}\,\underbrace{\underline{d\omega\vec{E}}}_{\frac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0}} + \mathbf{i}\omega\underline{\rho} = 0$$

$$\underline{\rho}\left(\frac{\underline{\sigma}}{\varepsilon_0} - \mathbf{i}\omega\right) = 0 = \underline{\rho}\left(\frac{\mathbf{i}n_0 e^2}{m\omega\varepsilon_0} - \mathbf{i}\omega\right)$$

En conséquence, on voit que l'on peut avoir $\underline{\rho} \neq 0$ (donc $\rho \neq 0$) si

$$\boldsymbol{\omega = \omega_p}$$

On peut prolonger l'exercice et montrer que les électrons oscillent à cette pulsation (*cf.* exercice traité dans le chapitre 1 du cours d'électromagnétisme : $m\overrightarrow{a_e} \approx -e\vec{E}$, $\vec{E}$ calculé en fonction du déplacement $\xi(x,t)$).

Voir aussi : « onde électrostatique » longitudinale.

– $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation $+\vec{u}$

En effet

$$\mathbf{i}k\vec{u}.\underline{\vec{E}} = 0$$

d'où

$$\vec{u}.\underline{\vec{E}} = 0$$

puis

$$\mathrm{Re}\left(\vec{u}.\underline{\vec{E}}\right) = 0 \equiv \vec{u}.\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\right)$$

De même,

$$\mathbf{i}k\vec{u}.\underline{\vec{B}} = 0$$

d'où

$$\vec{u}.\underline{\vec{B}} = 0$$

puis

$$\mathrm{Re}\left(\vec{u}.\underline{\vec{B}}\right) = 0 \equiv \vec{u}.\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{B}}\right)$$

L'O.P.P.H. dans le plasma est donc T.E.M. (Transverse ElectroMagnétique[4]).

Relation de MAXWELL-FARADAY :

$$\mathbf{i}\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \mathbf{i}\omega\underline{\vec{B}}$$

soit

$$\underline{\vec{\boldsymbol{B}}} = \frac{\boldsymbol{k\vec{u}} \wedge \underline{\vec{\boldsymbol{E}}}}{\boldsymbol{\omega}}$$

Equation de dispersion :

$$\begin{cases} \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}} \\ \mathbf{i}\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\mathbf{i}\omega\mu_0\varepsilon^*\underline{\vec{E}} \end{cases}$$

On peut finir le calcul de deux façons :

1.

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}) = \omega\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}$$

$$\underbrace{(\vec{k}.\underline{\vec{E}})}_{\substack{0\text{ car}\\ \underline{\rho}=0}}\vec{k} - \vec{k}^2\underline{\vec{E}} = -\omega^2\mu_0\varepsilon^*\underline{\vec{E}}$$

$$\vec{k} = k\vec{u}$$

$$\vec{k}^2 = k^2\vec{u}^2 = k^2$$

$$\underline{\vec{E}}(k^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon^*) = \vec{0}$$

2. Autre solution :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}) = -\omega^2\mu_0\varepsilon^*\underline{\vec{B}}$$

$$\underbrace{(\vec{k}.\underline{\vec{B}})}_{\substack{0\text{ car}\\ \mathrm{div}\underline{\vec{B}}=0}}\vec{k} - k^2\underline{\vec{B}} = -\omega^2\mu_0\varepsilon^*\underline{\vec{B}}$$

Il n'existe une O.P.P.H. dans ce plasma que si $(\vec{E}, \vec{B}) \neq (\vec{0}, \vec{0})$ ce qui nécessite :

[4] On retiendra que l'O.P.P.H. dans le plasma est transverse électrique et transverse magnétique.

$$\boldsymbol{k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon^*}$$

c'est-à-dire une relation entre $\vec{k}$ et ω.

Remarque :
Dans d'autres milieux, il peut y avoir plusieurs équations de dispersion.

Avec le ε^* du problème :

$$\boldsymbol{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

2.3 Etude des O.P.P.H. dans le plasma

- **Cas où $\boldsymbol{\omega > \omega_p}$**

$$k^2 \in \mathbb{R}_+$$

Deux solutions :

$$k = +\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

$$\equiv k' \text{puisque } k'' = 0$$

$$k = -\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

$$\equiv k' \text{puisque } k'' = 0$$

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}kz}\right)$$

si on choisit

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{B} = \mathrm{Re}\left(\frac{k\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\vec{E}}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\overrightarrow{u_z} \wedge \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\right)$$

Remarque :

Si l'O.P.P.H. est polarisée rectilignement, par exemple parallèlement à $\overrightarrow{u_x}$, on peut écrire :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \overrightarrow{u_x}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}kz}$$

avec $E_0 \in \mathbb{R}_+$

alors

$$\underline{\vec{B}} = \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\, \underbrace{\frac{\overrightarrow{u_z}}{c} \wedge \overrightarrow{u_x}}_{\frac{\overrightarrow{u_y}}{c}}\, E_0\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}kz}$$

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x}$$

et

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y}$$

sont en phase.

Dans le cas général d'une polarisation elliptique :

$$\overrightarrow{E_0} \leftrightarrow \left(E_{0x}\overrightarrow{u_x} + e^{\mathbf{i}\Phi} E_{0y}\overrightarrow{u_y}\right)$$

On constate que l'O.P.P.H. se propage sans atténuation/amplification, ce qui doit être compatible avec :

$$\langle \vec{j}.\vec{E}\rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = 0$$

(liée à la puissance moyenne fournie par l'O.P.P.H. aux électrons).

Vérifions :

$$\langle \vec{j}.\vec{E}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\sigma}\, \underbrace{\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*}_{\underline{\overrightarrow{E_0}}^2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underbrace{\mathbf{i}\frac{n_0 e^2}{m\omega}\underline{\overrightarrow{E_0}}^2}_{\text{imaginaire pur}}\right) = 0$$

Vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$

ici

$$k' = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

$$\boldsymbol{v_\varphi = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$$

Remarque :

– v_φ dépend de la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$, on dit (c'est général) qu'alors le milieu est *dispersif*,
– $v_\varphi > c$ ce qui n'est pas compatible avec la relativité (qui limite la vitesse de déplacement de l'énergie).

Indice de réfraction du milieu :

$$\boldsymbol{n' = \frac{c}{v_\varphi}}$$

$$n' = \frac{c}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1$$

Remarque :

– En général, on peut définir un indice complexe :

$$\boldsymbol{\underline{n} = n' + \mathrm{i}n''}$$

n'' est alors l'indice d'extinction et

$$\boldsymbol{\underline{k} = k' + \mathrm{i}k'' = n'k_0 + \mathrm{i}n''k_0 = k_0\underline{n}}$$

$$\boldsymbol{k_0 = \frac{\omega}{c}}$$

– Le mot dispersif est lié à $n = n(\omega)$.

Exemple :

Le verre est dispersif, on peut voir son effet avec un prisme.

On a $n = n(\lambda_0)$, λ_0 la longueur d'onde dans le vide.

Retour sur l'approximation de départ :

$$\frac{\left\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\right\|}{\left\|q\vec{E}\right\|}$$

avec $q = -e$.

Ici :

$$\left\|\vec{B}\right\| = \frac{\left\|\vec{E}\right\|}{\left|v_\varphi\right|}$$

D'où

$$\frac{\left\|\vec{v} \wedge \vec{B}\right\|}{\left\|\vec{E}\right\|} \leq \frac{\|\vec{v}\|}{\left|v_\varphi\right|}$$

Il est donc nécessaire d'avoir $\|\vec{v}\| \ll \left|v_\varphi\right|$ aux fréquences de travail.

Exercice :
Lumière (O.P.P.H. de pulsation ω) dans le vide ($n = 1$) réfractée dans un plasma (ionosphère) tel que $n < 1$.
La lumière est réfractée dans une direction $\overrightarrow{u'}$ telle que :

$$1. \sin i = n. \sin r$$

$$\boldsymbol{\sin \lambda = n(\omega)}$$

Toutes les O.P.P.H. ne se propageant pas à la même vitesse (ici la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$), peut-on définir la vitesse de propagation d'un *paquet d'ondes* ?

Réponse : oui, pour un milieu faiblement dispersif. La vitesse de propagation d'un paquet d'ondes est donnée par sa *vitesse de groupe*.

$$\boldsymbol{v_g = \frac{d\omega}{dk'}} \quad (\mathrm{m.\,s^{-1}})$$

Pour notre plasma :

$$k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$$

Il s'agit de l'équation de dispersion.

$$(2kdk)c^2 = 2\omega d\omega$$

$$\frac{kc^2}{\omega} = \frac{d\omega}{dk} \equiv \frac{d\omega}{dk'}$$

$$\boldsymbol{c^2 = v_\varphi v_g}$$

$$\boldsymbol{v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} < c$$

Justification de $v_g = \frac{d\omega}{dk'}$:

$$\underline{f}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}k(\omega)z} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Paquet d'O.P.P.H. se propageant toutes dans le sens $+\overrightarrow{u_z}$.

Pour un milieu *faiblement dispersif* :

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0)^2}_{\text{négligeons ce terme et les suivants}}$$

$$k(\omega) = k_0 + \frac{(\omega - \omega_0)}{v_g}$$

$$\underline{f}(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}k_0 z}\, e^{\mathbf{i}(\omega - \omega_0)\frac{z}{v_g}} d\omega$$

$$= \underbrace{e^{\mathbf{i}\left(k_0 z - \omega_0 \frac{z}{v_g}\right)}}_{\text{facteur de phase}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega)\, e^{-\mathbf{i}\omega\left(t - \frac{z}{v_g}\right)}\, d\omega}_{\underline{f}\left(0,t-\frac{z}{v_g}\right)}$$

A un facteur de phase près, on retrouve le paquet d'ondes (non déformé) qui s'est propagé à la vitesse v_g.

Remarque :
Si l'on tenait compte du deuxième ordre, on pourrait observer un étalement du paquet d'ondes.

Cas où $\omega < \omega_p$:

Alors :

$$k = \pm \mathbf{i} \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$$

Champs :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}kz} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{-\sqrt{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}}\, z}$$

ou

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{+\sqrt{\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}}\, z}$$

qui n'est pas acceptable car physiquement, le champ ne peut devenir infini lors de la propagation.

En définitive :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{-\frac{z}{\delta p}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{k\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{\mathbf{i}\overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega \delta p} = \frac{\mathbf{i}}{\omega \delta p} \overrightarrow{u_z} \wedge \left(\underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{-\frac{z}{\delta p}} \right)$$

avec

$$\boldsymbol{k = \frac{1}{\delta p}}$$

Pour une onde polarisée rectilignement parallèlement à $\overrightarrow{u_x}$:

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\mathbf{i}\overrightarrow{u_y}}{\omega \delta p} E_0\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{-\frac{z}{\delta p}}$$

pour

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \overrightarrow{u_x}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{-\frac{z}{\delta p}}$$

$$\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}) = E_0 \overrightarrow{u_x}\; e^{-\frac{z}{\delta p}} \cos \omega t$$

$$\vec{B} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{B}}) = \frac{\overrightarrow{u_y}}{\omega \delta p} E_0\; e^{-\frac{z}{\delta p}}\, \mathrm{Re}(\mathbf{i} e^{-\mathbf{i}\omega t}) = \frac{\overrightarrow{u_y}}{\omega \delta p} E_0\; e^{-\frac{z}{\delta p}} \sin \omega t$$

Commentaires :

O.P.P.M. de pulsation ω incidente polarisée rectilignement (dans le vide tel que ε_0, μ_0, $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$) passe dans un plasma.

Continuité des composantes tangentielles en $z = 0$ pour

$$E_{\text{incident}}(0^-)\overrightarrow{u_x} = \underbrace{E_{\text{plasma}}(0^+)}_{=E_0 \text{précédent}}\,\overrightarrow{u_x}$$

Le champ électromagnétique tel que :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \overrightarrow{u_x}\; e^{-\frac{z}{\delta p}} \cos \omega t \\ \vec{B} = \dfrac{\overrightarrow{u_y}}{\omega \delta p} E_0\; e^{-\frac{z}{\delta p}} \sin \omega t \end{cases}$$

Constitue un exemple d'*onde évanescente*.

Que peut-on dire de $\langle \vec{\Pi}.\overrightarrow{u_z} \rangle$, $\langle \vec{j}.\vec{E} \rangle$, $\langle w_{em} \rangle$?

$$\langle \vec{\Pi}.\overrightarrow{u_z} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \right)$$

ou calcul direct :

$$\langle \vec{\Pi}.\overrightarrow{u_z} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \frac{E_0^2}{\omega \delta p} e^{-\frac{z}{\delta p}} \sin \omega t \cos \omega t \rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}}$$

$\vec{\Pi}$ est bien dirigé dans le sens $+\overrightarrow{u_z}$ (déplacement d'énergie dans le sens $+\overrightarrow{u_z}$).

$$\langle \vec{\Pi}.\overrightarrow{u_z} \rangle = 0$$

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$$

$$\langle \vec{j}.\vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}.\underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\underline{\sigma}\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\mathbf{i}|\underline{\sigma}| E_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta p}}\right) = 0$$

$$\langle w_{em} \rangle = \langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \, e^{-\frac{2z}{\delta p}} \, \underbrace{\langle \cos^2 \omega t \rangle}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{(\omega \delta p)^2} \, e^{-\frac{2z}{\delta p}} \underbrace{\langle \sin^2 \omega t \rangle}_{\frac{1}{2}}$$

$$\langle w_{em} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \, e^{-\frac{2z}{\delta p}} \left(1 + \frac{c^2}{\omega^2 \delta p^2}\right) = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \, e^{-\frac{2z}{\delta p}} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \neq 0$$

Interprétation :
L'énergie électromagnétique incidente entre dans le plasma sur une épaisseur de quelques δp (phase transitoire) pour être ensuite *totalement réfléchie*.

(Puisque $\langle w_{em} \rangle = \frac{\text{constante}}{\text{temps}}$ avec $\langle \vec{j}.\vec{E} \rangle = 0$ et $\langle \vec{\Pi}.\vec{u_z} \rangle = 0$).

Exercice :
Dans le cas où $\omega > \omega_p$, proposer une expression pour la vitesse de déplacement de l'énergie électromagnétique moyenne.

$$\frac{\langle \vec{\Pi}.\vec{u_z} \rangle}{\langle w_{em} \rangle} \; ?$$

Quoi qu'il en soit, on donnera l'expression de ce rapport en fonction de n.

On se place dans le cas où $\omega > \omega_p$:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$k = (k' =) \, k_0 n$$

avec

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} \, e^{-\mathbf{i}\omega t} \, e^{\mathbf{i}k_0 n \vec{u}.\vec{r}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{k_0}{\omega}\vec{u}n \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{n}{c}\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{\vec{E}} \wedge \left(\frac{n}{c}\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}\right)^*\right) = \frac{1}{c}\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\left((\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*)\vec{u} - \underbrace{(\underline{\vec{E}}.\vec{u})}_{\substack{=0\ cf.\\ \mathrm{div}\vec{E}=0}}\underline{\vec{E}}^*\right)$$

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{n}{c}.\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\left|\underline{\vec{E_0}}\right|^2\vec{u} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\underbrace{cn}_{v_g}\left|\underline{\vec{E_0}}\right|^2\vec{u}$$

L'énergie électromagnétique moyenne traversant S entre t et $t + dt$:

$$\langle\vec{\Pi}\rangle.\vec{u}Sdt = \frac{1}{2}\varepsilon_0 v_g\left|\underline{\vec{E_0}}\right|^2 Sdt$$

A quoi sert cette énergie ?
- à créer les champs $(\vec{E}, \vec{B})$,
- à donner de l'énergie cinétique aux électrons.

v_E est alors telle que :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle.\vec{u}Sdt = \langle w_{em} + e_c\rangle\underbrace{v_E dtS}_{\text{volume}}$$

avec e_c l'énergie cinétique par unité de volume.

On aura donc plutôt :

$$v_E = \frac{\langle\vec{\Pi}\rangle.\vec{u}}{\langle w_{em} + e_c\rangle}$$

que

$$\frac{\langle\vec{\Pi}\rangle.\vec{u}}{\langle w_{em}\rangle}$$

Calculons :

$$\langle w_{em}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*}_{\left|\underline{\vec{E_0}}\right|^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2\underbrace{\underline{\vec{B}}.\underline{\vec{B}}^*}_{\left|\underline{\vec{E_0}}\right|^2\frac{n^2}{c^2}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left|\underline{\vec{E_0}}\right|^2(1+n^2)\right) = \frac{\varepsilon_0}{4}\left|\underline{\vec{E_0}}\right|^2(1+n^2)$$

$$e_c = \frac{1}{2}mv^2.n_0$$

avec n_0 le nombre d'électrons par m^3.

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}n_0 m\underline{\vec{v}}.\underline{\vec{v}}^*\right)$$

Rappel :

$$m\frac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} \approx e\underline{\vec{E}}$$

$$-\mathbf{i}m\omega\underline{\vec{v}} \approx -e\underline{\vec{E}}$$

$$\underline{\vec{v}} = \frac{e\underline{\vec{E}}}{\mathbf{i}m\omega}$$

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}n_0 m\frac{e^2\left|\underline{\overrightarrow{E_0}}\right|^2}{m^2\omega^2}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon_0\left|\underline{\overrightarrow{E_0}}\right|^2\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Finalement :

$$\langle w_{em} + e_c \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4}\left|\underline{\overrightarrow{E_0}}\right|^2\underbrace{\left(1 + n^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}_{2}$$

$$\boldsymbol{v_E} = \frac{\langle\overrightarrow{\boldsymbol{\Pi}}\rangle.\vec{\boldsymbol{u}}}{\langle \boldsymbol{w_{em}} + \boldsymbol{e_c}\rangle} = \boldsymbol{v_g} < c$$

La vitesse de déplacement de l'énergie est donc ici identique à la vitesse de groupe (cas où $\omega > \omega_p$).