- Cours d'électromagnétisme -

Propagation libre dans le vide sans sources

Hypothèses :

- On se place dans le vide dont les caractéristiques sont : ε_0, μ_0, $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$.
- Il y a une source de champs (par exemple : dipôle rayonnant).

1 Equations de propagation

On part des équations de MAXWELL :

$$\begin{cases} \mathbf{div}\vec{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{div}\vec{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{t}} \\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{\boldsymbol{B}} = \underbrace{\boldsymbol{\mu_0 \varepsilon_0}}_{=\frac{1}{c^2}} \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\underbrace{\mathrm{div}\vec{E}}_{0}\right) - \vec{\Delta}\vec{E}$$

et finalement,

$$\vec{\boldsymbol{\Delta}}\vec{\boldsymbol{E}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c^2}}\frac{\boldsymbol{\partial^2}\vec{\boldsymbol{E}}}{\boldsymbol{\partial t^2}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Remarque :
Cette équation est invariante par le changement $t \leftrightarrow -t$, contrairement à une équation de diffusion thermique $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)$.

On fait le même calcul pour $\vec{B}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\underbrace{\text{div}\vec{B}}_{0}\right) - \vec{\Delta}\vec{B}$$

d'où :

$$\boldsymbol{\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ obéissent à un même type d'équation.
Si l'on prend les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \Delta E_x - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta E_y - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta E_z - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta B_x - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta B_y - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta B_z - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Soit $\Psi(x, y, z, t)$ l'une de ces six composantes, elle est fonction de l'équation :

$$\boldsymbol{\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0}$$

équation dite de d'ALEMBERT.

Remarque :
Ce type d'équations se rencontre aussi en mécanique et en acoustique.

Exemples :

– **Déplacement transversal le long d'une corde souple**

Notons $u(x,t)$ un petit déplacement transversal d'une corde souple (par rapport à son axe).

On montre que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

avec

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

avec T la tension de la corde, μ la masse linéique de la corde.
L'ordre de grandeur de v est $20\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

– **Déplacement longitudinal des atomes dans une barre**

Notons $u(x,t)$ un petit déplacement longitudinal des atomes proches initialement du plan x.

On montre que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

avec

$$v = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$$

avec ρ la masse volumique du matériau de la barre, et E_0 le module d'YOUNG du matériau.
L'ordre de grandeur de v est $5000\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

– **Propagation du son dans l'air**

$u(x,t)$ reste ici un petit déplacement longitudinal dans l'air traversé par du son émis par un haut-parleur selon la direction de l'axe des x.

On a également :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

avec

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_S}}$$

avec ρ la masse volumique de l'air et χ_S son coefficient de compressibilité adiabatique.
On trouve, à température ambiante et à la pression atmosphérique : $v \approx 300\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Vocabulaire :
Les solutions d'une équation de d'ALEMBERT sont appelées *ondes*, mais toutes les ondes ne sont pas des solutions d'une équation de d'ALEMBERT).

2 Solutions particulières : ondes planes

2.1 Existence et interprétation

Définition :
Une *surface d'onde* est un ensemble continu de points tel que le champ étudié soit constant à une date t.

Définition :
Une *onde plane* est une onde dont les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à une direction fixe $\vec{u}$ de l'espace ($\|\vec{u}\| = 1$).

Pour simplifier l'équation en $\Delta\Psi(x,y,z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0$, on a intérêt à bien choisir les axes (Ox, Oy, Oz).

En effet, si on choisit par exemple $\vec{u} = \overrightarrow{u_z}$, la solution recherchée se réduit à $\Psi(z,t)$ puisqu'on cherche $\Psi = cte$ à t fixée dans un plan perpendiculaire à $\vec{u} = \overrightarrow{u_z}$.

Remarque :
L'équation des plans perpendiculaires à $\vec{u}$ est

$$\boldsymbol{\vec{r}.\vec{u} = cte}$$

L'onde plane telle que $\vec{u} = \overrightarrow{u_z}$ recherchée doit vérifier $\Delta\Psi(z,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(z,t)}{\partial t^2} = 0$.

On propose un changement de variables :

$$z'_1 = t - \frac{z}{c}$$

$$z'_2 = t + \frac{z}{c}$$

$\Psi(z,t) \to \widetilde{\Psi}(z'_1, z'_2)$ solution de :

$$\frac{\partial^2 \Psi^2(z'_1, z'_2)}{\partial z'_1 \partial z'_2} = 0$$

Alors la solution est de la forme :

$$\widetilde{\Psi}(z'_1, z'_2) = f(z'_1) + g(z'_2)$$

d'où :

$$\Psi(z,t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right)$$

Alternative :

$$\Psi(z,t) = F(z - ct) + G(z + ct)$$

Il existe donc des ondes planes solutions de l'équation de d'ALEMBERT telles que :

$$\Psi(\vec{r},t) = f\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)$$

dont les surfaces d'onde sont perpendiculaires à $\vec{u}$.

Interprétation physique :
$\Psi^+(\vec{r},t) = f\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right) = \Psi^+\left(0, t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)$.
$\Psi^+(\vec{r},t) = f\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)$ représente une onde plane se propageant sans déformation dans la direction réelle $+\vec{u}$ ($\in \mathbb{R}^3$), on parle d'*onde plane progressive* (*O.P.P.*) dans la direction $+\vec{u}$.
De même $\Psi(\vec{r},t) = g\left(t + \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)$ est une onde plane progressive se déplaçant sans déformation dans la direction $-\vec{u}$.
Finalement, l'onde plane solution de l'équation de d'ALEMBERT est la superposition (en général) de deux ondes planes progressives se propageant en sens inverse.

2.2 Ondes planes harmoniques

Rappel :
Pour une onde plane (ici scalaire) : $f\left(t-\frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)=f(\vec{r},t)\equiv f\left(\vec{O},t-\frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)$, avec $\vec{u}$ la direction de propagation.

Pour une onde harmonique :

$$f(\vec{O},t)=A_0\cos(\omega t)$$

avec $A_0\in\mathbb{R}^+$.

En $M(\vec{r})$ à la date t :

$$f(\vec{r},t)=A_0\cos\left(\omega\left(t-\frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)\right)=A_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}\vec{r}.\vec{u}\right)$$

On pose :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{k'}=\frac{\omega}{c}\vec{u}=k'\vec{u}}$$

appelé *vecteur d'onde* (dans le sens de la propagation).

Une O.P.P.H. (ou O.P.P.M.[1]) peut s'écrire :

$$\boldsymbol{f(\vec{r},t)=A_0\cos\left(\omega t-\overrightarrow{k'}.\vec{r}-\phi_0\right)}$$

avec $A_0\in\mathbb{R}^+$.

Introduisons la vitesse de phase $\overrightarrow{v_\varphi}$.

Définition :
On appelle *surface isophase*, lieu continu de points tel que la phase instantanée $\left(\omega t-\overrightarrow{k'}.\vec{r}-\phi_0\right)$ a la même valeur à une date t.

En conséquence, ici ce sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation $\vec{u}$ (puisqu'il faut alors $\overrightarrow{k'}.\vec{r}=k'\vec{u}.\vec{r}=cte$).

$$\underbrace{\omega t-k'z-\phi_0}_{\text{à } t}=\underbrace{\omega(t+dt)-k'(z+dz)-\phi_0}_{\text{à } t+dt}$$

[1] « M » pour monochromatique.

d'où

$$\boldsymbol{v_\varphi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k'}}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_\varphi} = \frac{\omega}{k'}\vec{u}}$$

Dans le cas d'une O.P.P.M. dans le vide avec $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$:

$$\boldsymbol{v_\varphi = c}$$

Définition :
On définit la *longueur d'onde* par :

$$\boldsymbol{\lambda = v_\varphi T}$$

avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω est la *pulsation de l'onde,*

$$\nu = \frac{1}{T}$$

est la *fréquence* (exprimée en Hertz, Hz).

On a avec :

$$\begin{cases} T = \dfrac{2\pi}{\omega}, \lambda = v_\varphi \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{k'} \\ v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{k' = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Dans le cas particulier du vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\begin{cases} v_\varphi = c \\ \lambda = cT = \lambda_0 \\ k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0} \end{cases}$$

Propriété :
λ est la *période spatiale* (comme $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période temporelle).

Expression d'une onde plane progressive harmonique :

$$\vec{E}\begin{cases} E_{0x}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k'}.\vec{r} - \boldsymbol{\phi_{0x}}\right) \\ E_{0y}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k'}.\vec{r} - \boldsymbol{\phi_{0y}}\right) \\ E_{0z}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k'}.\vec{r} - \boldsymbol{\phi_{0z}}\right) \end{cases}$$

$$\vec{B}\begin{cases} B_{0x}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k'}.\vec{r} - \boldsymbol{\phi'_{0x}}\right) \\ B_{0y}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k'}.\vec{r} - \boldsymbol{\phi'_{0y}}\right) \\ B_{0z}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k'}.\vec{r} - \boldsymbol{\phi'_{0z}}\right) \end{cases}$$

avec $\left(E_{0x}, E_{0y}, E_{0y}, B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}\right) \in (\mathbb{R}^+)^6$

Ondes planes progressives harmoniques dans le formalisme complexe :

$$f(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\underline{f}(\vec{r},t)\right)$$

avec[2]

$$\underline{f}(\vec{r},t) = \underline{A_0}\, e^{\mathbf{i}\overrightarrow{k'}.\vec{r}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}$$

L'intérêt de $\underline{A_0}$ est qu'il intègre le terme de phase ϕ_0.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)\right) = \begin{cases} \underline{E_{0x}} e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\overrightarrow{k'}.\vec{r}} \\ \underline{E_{0y}} e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\overrightarrow{k'}.\vec{r}} \\ \underline{E_{0z}} e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\overrightarrow{k'}.\vec{r}} \end{cases}$$

d'où :

$$\boldsymbol{\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}\, e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\overrightarrow{k'}.\vec{r}}}$$

avec :

$$\underline{\overrightarrow{\boldsymbol{E_0}}} = \underbrace{E_{0x}\, e^{\mathbf{i}\phi_{0x}}}_{\underline{E_{0x}}}\, \overrightarrow{u_x} + \underbrace{E_{0y}\, e^{\mathbf{i}\phi_{0y}}}_{\underline{E_{0y}}}\, \overrightarrow{u_y} + \underbrace{E_{0z}\, e^{\mathbf{i}\phi_{0z}}}_{\underline{E_{0z}}}\, \overrightarrow{u_z}$$

[2] Dans tout ce document, **i** désigne le nombre tel que $\mathbf{i}^2 = -1$.

Propriété[3] :

$$\underline{\overrightarrow{E_0}}.\underline{\overrightarrow{E_0}}^* = E_0^2$$

avec

$$E_0^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2$$

Preuve :

$$\left(\underline{E_{0x}}\overrightarrow{u_x} + \underline{E_{0y}}\overrightarrow{u_y} + \underline{E_{0z}}\overrightarrow{u_z}\right).\left(\underline{E_{0x}}\overrightarrow{u_x} + \underline{E_{0y}}\overrightarrow{u_y} + \underline{E_{0z}}\overrightarrow{u_z}\right)^*$$

$$= \underline{E_{0x}}.\underline{E_{0x}}^* + \underline{E_{0y}}.\underline{E_{0y}}^* + \underline{E_{0z}}.\underline{E_{0z}}^*$$

$$= E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2$$

■

Intérêt des ondes planes progressives harmoniques :

Physiquement, elles n'existent pas (elles prennent leur origine à $t \to -\infty$ et durent jusqu'à $t \to +\infty$).
Mais on peut décomposer un grand nombre de fonctions en somme d'ondes planes progressives harmoniques *via* la *transformée de* FOURIER (généralisation des séries de FOURIER).

$$f(\vec{r},t) \xrightarrow{T.F.} F(\vec{k},\omega)$$

$$F(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r},t) e^{\mathbf{i}\omega t}\, e^{-\mathbf{i}\vec{k'}.\vec{r}} d^3\vec{r}$$

Transformée de FOURIER inverse :

$$F(\vec{k},\omega) \xrightarrow{T.F.^{-1}} f(\vec{r},t)$$

$$f(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \iiint_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{F(\vec{k},\omega) e^{-\mathbf{i}\omega t}\, e^{\mathbf{i}\vec{k'}.\vec{r}}}_{\text{O.P.P.H.}} \quad \underbrace{d^3\vec{k}}_{\text{on intègre sur toutes les directions possibles de l'espace}}$$

[3] La notation $\underline{\overrightarrow{E_0}}^*$ désigne le conjugué de $\underline{\overrightarrow{E_0}}$ (si $\underline{z} = a + \mathbf{i}b$, alors $\underline{z}^* = a - \mathbf{i}b$).

Si l'on se contente d'une onde plane se propageant dans une direction donnée, l'intégration sur $\vec{k}$ disparaît :

$$f(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F\left(\vec{k} = k\vec{u}, \omega\right) e^{\mathbf{i}\vec{k}.\vec{r}} \, e^{-\mathbf{i}\omega t}$$

avec une relation $k(\omega)$ à préciser.

3 Structure d'une onde plane $\left(\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{B}}\right)$

Résultats pour une propagation dans le vide (ε_0, μ_0, $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$).

Propriétés :

$$\left(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}\right)$$

forme un trièdre direct.

$$\boldsymbol{\|\vec{E}\| = \|\vec{B}\| c}$$

Remarque :
Quel est l'intérêt de la relation $\|\vec{E}\| = \|\vec{B}\|c$?
Par exemple, elle sert à comparer $\|\vec{F_E}\|$ et $\|\vec{F_B}\|$.

On a :

$$\|\vec{F_E}\| = \|q\vec{E}(\vec{r},t)\|$$

$$\|\vec{F_B}\| = q\vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r},t)$$

$$\frac{\|\vec{F_B}\|}{\|\vec{F_E}\|} \leq \frac{|q|\|\vec{v}\|.\|\vec{B}\|}{|q|\|\vec{E}\|}$$

Et puisque dans le domaine non relativiste :

$$\|\vec{v}\| \ll c$$

il vient :

$$\frac{\|\vec{F_B}\|}{\|\vec{F_E}\|} \ll \frac{c\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|}$$

et en utilisant la relation $\|\vec{E}\| = \|\vec{B}\|c$:

$$\frac{\|\overrightarrow{F_B}\|}{\|\overrightarrow{F_E}\|} \ll \mathbf{1}$$

On pourra donc négliger la force magnétique.

Plusieurs démonstrations sont possibles :
- « directement » en utilisant les équations de MAXWELL avec l'expression et $\left(t - \frac{z}{c}\right)$,
- *via* des O.P.P.H. en formalisme réel ou complexe.

Première méthode :

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{B}\left(t - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \text{ ici on choisit } \vec{u} = \overrightarrow{u_z} \\ \mathrm{div}\vec{E}\left(t - \dfrac{z}{c}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \text{ car ici } \rho = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\left(t - \dfrac{z}{c}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}\left(t - \dfrac{z}{c}\right) \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\left(t - \dfrac{z}{c}\right) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}\left(t - \dfrac{z}{c}\right) \end{cases}$$

On procède à un changement de variable tel que :

$$\begin{cases} z_1' = t - \dfrac{z}{c} \\ z_2' = t + \dfrac{z}{c} \end{cases}$$

$$\mathrm{div}\vec{B}(z_1') = 0 = ?$$

$$\mathrm{div}\vec{B}\left(t - \frac{z}{c}\right) = \frac{\partial}{\partial x}B_x\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}B_y\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}B_z\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x\left(t - \frac{z}{c}\right) = \frac{d}{dz_1'}\widetilde{B_x}(z_1').\underbrace{\frac{\partial z_1'}{\partial x}}_{0}$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial y}B_y\left(t - \frac{z}{c}\right) = \frac{d}{dz_1'}\widetilde{B_y}(z_1').\underbrace{\frac{\partial z_1'}{\partial y}}_{0}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B_z\left(t-\frac{z}{c}\right)=\frac{d}{dz_1'}\widetilde{B_z}(z_1').\underbrace{\frac{\partial z_1'}{\partial z}}_{-\frac{1}{c}}$$

$\mathrm{div}\vec{B}=0$ conduit à :

$$\frac{d}{dz_1'}\widetilde{B_z}(z_1')=0$$

d'où :

$$\widetilde{B_z}(z_1')=cte$$

Sens physique : composante d'un champ magnétostatique : inexistant ici puisqu'on ne s'intéresse qu'à des champs variables qui se propagent).
D'où :

$$\boldsymbol{B_z=0}$$

$$\vec{B}\perp\overrightarrow{u_z}=\vec{u}$$

De la même façon, si $\rho=0$, on a :

$$\boldsymbol{E_z=0}$$

En résumé :
Le caractère transversal de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ (c'est-à-dire perpendiculaire à $\vec{u}$), est dû à $\mathrm{div}\vec{B}\left(t-\frac{z}{c}\right)=0$ et $\mathrm{div}\vec{E}\left(t-\frac{z}{c}\right)=0$.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\left(t-\frac{z}{c}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\left(t-\frac{z}{c}\right)$$

$$\begin{cases}\partial_y E_z\left(t-\frac{z}{c}\right)-\partial_z E_y\left(t-\frac{z}{c}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}B_x=-\frac{\partial}{\partial z}E_y\left(t-\frac{z}{c}\right)\\ \partial_z E_x\left(t-\frac{z}{c}\right)-\partial_x E_z\left(t-\frac{z}{c}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}B_y=-\frac{\partial}{\partial z}E_x\left(t-\frac{z}{c}\right)\\ \partial_x E_y\left(t-\frac{z}{c}\right)-\partial_y E_x\left(t-\frac{z}{c}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}B_z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{d}{dz_1'}\widetilde{E_y}(z_1').\frac{\partial z_1'}{\partial z}=\frac{d}{dz_1'}\widetilde{B_x}(z_1').\frac{\partial z_1'}{\partial t}\\ \frac{d}{dz_1'}\widetilde{E_X}(z_1').\frac{\partial z_1'}{\partial z}=-\frac{d}{dz_1'}\widetilde{B_y}(z_1').\frac{\partial z_1'}{\partial t}\end{cases}$$

$$\frac{\partial z_1'}{\partial t} = -\frac{1}{c}$$

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = 1$$

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dz_1'}\widetilde{E_y} = c\dfrac{d}{dz_1'}\widetilde{B_x} & .\overrightarrow{u_x} \\ \dfrac{d}{dz_1'}\widetilde{E_X} = c\dfrac{d}{dz_1'}\widetilde{B_y} & .\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

$$c\frac{d}{dz_1'}\underbrace{\left(\widetilde{B_x}\overrightarrow{u_x} + \widetilde{B_y}\overrightarrow{u_y} + \vec{0}\right)}_{\vec{B}(z_1')} = \frac{d}{dz_1'}\left(-\widetilde{E_y}\overrightarrow{u_x} + \widetilde{E_x}\overrightarrow{u_y}\right) = \frac{d}{dz_1'}\left(\overrightarrow{u_z} \wedge \underbrace{\left(\widetilde{E_y}\overrightarrow{u_y} + \widetilde{E_x}\overrightarrow{u_x}\right)}_{\vec{E}(z_1')}\right)$$

Toujours en nous limitant aux champs variables (onde qui se propage hors champs statiques ici) :

$$c\vec{B}\left(t - \frac{z}{c}\right) = \overrightarrow{u_z} \wedge \vec{E}\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

on a bien :

$$\boldsymbol{\vec{B}} \perp \boldsymbol{\overrightarrow{u_z}}$$

$$\boldsymbol{\vec{B}} \perp \boldsymbol{\vec{E}}$$

d'où

$$c\left\|\vec{B}\right\| = \|\overrightarrow{u_z}\|.\left\|\vec{E}\right\|.\underbrace{\left|\sin\left(\overrightarrow{u_z}, \vec{E}\right)\right|}_{1}$$

et donc

$$\boldsymbol{c}\left\|\boldsymbol{\vec{B}}\right\| = \left\|\boldsymbol{\vec{E}}\right\|$$

Vocabulaire :
Onde T.E.M. signifie onde transverse électrique et transverse magnétique.

4 Polarisation d'une onde plane progressive harmonique

$$\vec{E}\begin{cases} E_{ox}\cos(\omega t - k'z) \\ E_{oy}\cos(\omega t - k'z - \phi) \\ 0 \end{cases}$$

où

$$\phi = \phi_{0y} - \phi_{0x}$$

liée au déphasage entre les deux composantes E_x et E_y en (z, t).

Remarque :
En général, on prend

$$\phi \in [-\pi, +\pi]$$

Envisageons quelques cas :

- **cas où $\boldsymbol{\phi = 0}$:**

On constate que dans un plan d'onde (ici confondu avec une surface isophase), z fixe, la direction du champ $\vec{E}$ au cours du temps est **constante.**

Puisque

$$\frac{E_y(z,t)}{E_x(z,t)} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} = constante > 0, \forall t, \text{pour } z \text{ quelconque fixé}$$

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}}$$

La variation par rapport au temps se fait à $\nu = 10^{14}$ Hz (domaine visible), non observable sur un oscilloscope.

On dit que l'O.P.P.H. est *polarisée rectilignement*.

- **autres cas de polarisation rectiligne $\boldsymbol{\phi = \pm\pi}$:**

En effet :

$$\vec{E}\begin{cases} E_{ox}\cos(\omega t - k'z) \\ E_{oy}\cos(\omega t - k'z \pm \pi) = \theta E_{0y}\cos(\omega t - k'z) \\ 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\tan\theta = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}}}$$

- **cas où $\boldsymbol{\phi = \pm\frac{\pi}{2}}$ (avec $\boldsymbol{E_{0x} \neq E_{0y}}$) :**

$$\vec{E}\begin{cases} E_{ox}\cos(\omega t - k'z) \\ E_{oy}\cos\left(\omega t - k'z - \dfrac{\pi}{2}\right) = E_{0y}\sin(\omega t - k'z) \\ 0 \end{cases}$$

Equation d'une ellipse ramenée à ses axes principaux.
L'extrémité de $\vec{E}$, dans un plan z fixé, décrit une ellipse au cours du temps, on parle de *polarisation elliptique*.

Pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$:

$$\vec{E}\begin{cases} E_{ox}\cos(\omega t - k'z) \\ -E_{oy}\sin(\omega t - k'z) \\ 0 \end{cases}$$

Définitions :
On dit qu'une O.P.P.H. est *polarisée elliptiquement droite* si l'observateur recevant l'onde voit tourner $\vec{E}$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
On dit qu'une O.P.P.H. est *polarisée elliptiquement gauche* si l'observateur recevant l'onde voit tourner $\vec{E}$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

D'une manière générale pour $E_{0x} \neq E_{0y}$ et ϕ quelconque, on a une polarisation elliptique (droite ou gauche). Seule différence, les axes de l'ellipse subissent une rotation autour de Oz.

Cas particulier d'une O.P.P.H. polarisée circulaire (droite ou gauche) :

Cela correspond aux cas elliptiques précédents $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mais en plus

$$E_{0x} = E_{0y}$$

Quelques expressions dans $\mathbb{C}$:

Pour une O.P.P.H. elliptique quelconque :

$$\underline{\vec{E}}\begin{cases} E_{ox}\, e^{-\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}k'z} \\ E_{oy}\, e^{-\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}k'z}\, e^{\mathrm{i}\phi} \\ 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\underline{\vec{E}} = \left(E_{ox}\overrightarrow{u_x} + E_{0y}\, e^{\mathrm{i}\phi}\, \overrightarrow{u_y}\right) e^{-\mathrm{i}\omega t}\, e^{\mathrm{i}k'z}}$$

$$\left(\boldsymbol{E_{ox}}, \boldsymbol{E_{0y}}\right) \in (\mathbb{R}^+)^2$$

– Polarisation circulaire gauche :

$$E_{0x} = E_{0y}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\vec{\boldsymbol{E}}} = \boldsymbol{E_{ox}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}} + \mathrm{i}\overrightarrow{\boldsymbol{u_y}}\right) \boldsymbol{e^{-\mathrm{i}\omega t}}\, \boldsymbol{e^{\mathrm{i}k'z}}$$

– Polarisation circulaire droite :

$$E_{0x} = E_{0y}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\vec{\boldsymbol{E}}} = \boldsymbol{E_{ox}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}} - \mathrm{i}\overrightarrow{\boldsymbol{u_y}}\right) \boldsymbol{e^{-\mathrm{i}\omega t}}\, \boldsymbol{e^{\mathrm{i}k'z}}$$

Exercice :

– Montrer qu'une elliptique quelconque est une superposition de deux rectilignes circulaires.
– Montrer qu'une elliptique quelconque est une superposition d'une circulaire gauche et d'une circulaire droite (coaxiales et d'amplitudes différentes).
– Montrer qu'une polarisation rectiligne est une superposition d'une circulaire gauche et d'une circulaire droite (coaxiales et de même amplitude).

Exercice :

– Ecrire le vecteur de POYNTING (dans $\mathbb{R}$) pour une O.P.P.H. elliptique.
– Peut-on mesurer la valeur instantanée ? Sinon, l'accès à $\langle\vec{\Pi}\rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}}$ permet-il d'obtenir l'état de polarisation ?

5 Energie d'une onde plane progressive harmonique – vitesse de propagation de l'énergie

Soit une O.P.P. (pas nécessairement monochromatique).

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)$$

$$\vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)$$

Densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$w_{em} = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)}_{w_E} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)}_{w_B}$$

Avec la propriété

$$\left\|\vec{E}\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)\right\| = \left\|\vec{B}\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)\right\|.c$$

on a

$$w_B \equiv w_E$$

et donc

$$\boldsymbol{w_{em}\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right) = \varepsilon_0 \vec{E}^2\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)}$$

Vecteur de POYNTING :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right) \wedge \vec{B}\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right) = \frac{1}{\mu_0}\|\vec{E}\|.\|\vec{B}\|.\vec{u}$$

sachant que $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{u}$ forment un trièdre direct

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{c}\vec{E}^2\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right).\vec{u}$$

puis avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

on a

$$\boldsymbol{\vec{\Pi} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{E}^2\left(t - \frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right).\vec{u}}$$

On voit que l'énergie électromagnétique se propage dans la direction $\vec{u}$.

Remarque :
Le terme en

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0$$

représente l'*impédance du vide*.
Avec $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$ et $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \mathrm{F.m^{-1}}$, on trouve :

$$\boldsymbol{Z_0 \approx 378\ \Omega}$$

Vitesse de propagation de l'énergie (moyenne) :

$$v_E$$

est la vitesse de l'énergie électromagnétique.

$$\iint_S \langle\vec{\Pi}\rangle.\overrightarrow{u_z}dSdt$$

est l'énergie (moyenne) traversant S entre t et $t+dt$.

Cette énergie se retrouve dans le champ $(\vec{E},\vec{B})$ qui va occuper le volume

$$S.v_E dt$$

Remarque :
Il n'y pas de cession d'énergie à des charges/courants absents du domaine.

$$\underbrace{\langle\vec{\Pi}\rangle.\overrightarrow{u_z}dSdt}_{\substack{\vec{\Pi}\text{ est constant,}\\ \text{à }t,\ \text{ sur tout}\\ \text{le plan de côte }z}} = \langle w_{em}\rangle.Sv_E dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left\langle\vec{E}^2\left(t-\frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)\right\rangle\overrightarrow{u_z}.\overrightarrow{u_z}Sdt$$

$$\boldsymbol{v_E = \frac{\langle\vec{\Pi}.\overrightarrow{u_z}\rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}}}{\langle w_{em}\rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}}}}$$

$$\boldsymbol{v_E = c}$$

puisque

$$\langle w_{em}\rangle = \varepsilon_0\langle E^2\rangle$$

L'énergie électromagnétique d'une O.P.P. se propage à la vitesse c dans le vide sans charge ni courant.

Rappel :
Vitesse de propagation[4] :

$$c$$

Vitesse de phase :

$$v_\varphi = c$$

Vitesse de l'énergie :

$$v_E = c$$

Exercice :
Donner les expressions de $\langle w_{em} \rangle$ et $\langle \vec{\Pi} \rangle$ pour une O.P.P.H. en notation complexe.

On a :

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\right)$$

avec

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}} e^{-\mathrm{i}\omega t}\ e^{\mathrm{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

avec

$$\vec{k} = k\vec{u}$$

$$k = k' = \frac{\omega}{c}$$

Et également :

$$\vec{B} = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{B}}\right)$$

avec

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\overrightarrow{B_0}} e^{-\mathrm{i}\omega t}\ e^{\mathrm{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

[4] Celle apparaissant dans l'équation de d'ALEMBERT.

$$\langle \vec{\boldsymbol{\Pi}} \rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{Re}\left(\underline{\vec{\boldsymbol{\Pi}}}\right)$$

avec

$$\underline{\vec{\Pi}} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* = \frac{1}{\mu_0} \underline{\overrightarrow{E_0}} \wedge \underline{\overrightarrow{B_0}}^*$$

$$\langle w_{em} \rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} . \underline{\vec{E}}^*\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} \underline{\vec{B}} . \underline{\vec{B}}^*\right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} \underline{\overrightarrow{E_0}} . \underline{\overrightarrow{E_0}}^*\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} \underline{\overrightarrow{B_0}} . \underline{\overrightarrow{B_0}}^*\right)$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_0 \left(\overrightarrow{E_0}^2\right) + \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} \left(\overrightarrow{B_0}^2\right)$$

On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

donc

$$\mathbf{i} \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \mathbf{i} \omega \underline{\vec{B}}$$

$$\vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E_0}} = \omega \underline{\overrightarrow{B_0}} \quad (*)$$

La relation $(*)$ montre que $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, que les composantes de $\vec{B}$ ont les mêmes phases que celles de $\vec{E}$.

Par ailleurs :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E_0}}}{\omega}\right) = \mathrm{Re}\left(\underline{\overrightarrow{B_0}}\right)$$

$$\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \mathrm{Re}\left(\underline{\overrightarrow{E_0}}\right) = \mathrm{Re}\left(\underline{\overrightarrow{B_0}}\right)$$

$$\left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{B_0}\right)$$

On a aussi (même calcul) :

$$\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \vec{B}$$

Finalement,

$$\overrightarrow{B_0}^2 = \frac{\overrightarrow{E_0}^2}{c^2}$$

ce qui conduit à

$$\langle w_{em} \rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

$$\underline{\vec{\Pi}} = \frac{1}{\mu_0}\underline{\overrightarrow{E_0}} \wedge \underline{\overrightarrow{B_0}}^* = \frac{1}{\mu_0}\underline{\overrightarrow{E_0}} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \overrightarrow{E_0}\right)^* = \frac{1}{\mu_0 c}\underline{\overrightarrow{E_0}} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{E_0}^*\right) = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\underline{\overrightarrow{E_0}}.\overrightarrow{E_0}^*\right)\vec{u}$$

puisque

$$\vec{u}.\overrightarrow{E_0}$$

$$\underline{\vec{\Pi}} = \frac{1}{\mu_0 c}E_0^2\vec{u}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{\Pi}}\right) = \frac{1}{2\mu_0 c}E_0^2\vec{u}$$

$$\langle w_{em} \rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \times 2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

Sur l'usage de la notation complexe :

1. Avant passage aux complexes, vérifier que toutes les relations utilisées sont linéaires.
2. Avant d'utiliser :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \mathbf{i}\vec{k} \wedge \underline{\vec{A}}$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \mathbf{i}\vec{k}.\underline{\vec{A}}$$

vérifier que l'on part de :

$$\underline{\vec{\boldsymbol{A}}} = \underline{\overrightarrow{\boldsymbol{A_0}}}\, \boldsymbol{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \boldsymbol{e}^{\mathrm{i}\vec{k}.\vec{r}}$$

3. Pour le calcul de $\langle A.B\rangle_T = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{A}.\underline{B}^*\right)$:

$$\langle\vec{A}.\vec{B}\rangle_T = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{A}}.\underline{\vec{B}}^*\right)$$

$$\langle\vec{A}\wedge\vec{B}\rangle_T = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{A}}\wedge\underline{\vec{B}}^*\right)$$