



Exercice de thermodynamique

Expérience originelle de FOURIER

Dans le cas du fer, pour les applications numériques, on prendra : $\rho = 7,86 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c = 400 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\lambda = 81 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

Partie A Conduction dans un barreau

QUESTION 1 Énoncer la loi de FOURIER pour la conduction thermique, en définissant les différentes grandeurs utilisées et en précisant leur dimension.

La loi de FOURIER pour la conduction thermique est : $\vec{j}_{cond} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$ où \vec{j}_{cond} est la densité de courant de transfert thermique ou encore la puissance surfacique en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ et $\lambda > 0$ la conductivité thermique $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

QUESTION 2 Relier cette loi au second principe de la thermodynamique.

Le second principe de la thermodynamique indique que seuls certains sens d'évolution spontanée sont possibles. Par exemple, dans le cas des transferts thermiques, on sait que ceux-ci s'effectuent spontanément uniquement des zones à température élevée vers les zones à température faible. Ceci se retrouve dans la loi de FOURIER du fait de la présence du signe $-$. En effet, si on raisonne à une dimension $j_x = -\lambda \frac{dT}{dx}$ on constate que j_x est bien orienté dans le **sens des températures décroissantes**.

QUESTION 3 Dans le domaine électrique, la loi d'OHM présente des analogies avec la loi de FOURIER. Donner un tableau de correspondance entre le flux thermique ϕ , les grandeurs précédemment introduites et les grandeurs électriques analogues.

Dans le domaine électrique, la loi d'OHM est $\vec{j}_{el} = \gamma \vec{E}$, où γ est la conductivité électrique. Dans le cadre des régimes permanents ou quasi-permanents, on sait que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$. On retrouve une loi analogue puisque $\vec{j}_{el} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}V}$. Les analogies sont immédiates entre **T** et **V** en particulier. Le flux de \vec{j}_{el} représente l'intensité électrique suivant : $i = \iint \vec{j}_{el} \cdot \overrightarrow{dS}$. Le flux de \vec{j}_{cond} est la puissance thermique transférée par conduction thermique : $P_{cond} = \iint \vec{j}_{cond} \cdot \overrightarrow{dS}$. L'analogie se poursuit entre **i** et **P_{cond}**.

QUESTION 4 Soit un barreau de longueur L , de section droite carrée de surface S et dont le côté est très inférieur à L . Ce barreau est entouré par une enveloppe adiabatique. On considère qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale et que la température est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend que de son abscisse x et du temps t . En effectuant un bilan enthalpique pour la partie de barreau située entre les abscisses x et $x + dx$, montrer que la température $T(x, t)$ dans le barreau est solution de l'équation aux dérivées partielles appelée équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

La variation d'énergie du système étudié (à savoir le solide compris entre x et $x + dx$) au cours du temps revient à la variation de son énergie interne puisqu'il n'y a pas de prise en compte de termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. On sait de plus que pour un solide, on peut confondre enthalpie et énergie interne. Le bilan énergétique, écrit en puissance fait donc intervenir : $\frac{dE}{dt} = \rho c S dx \frac{dT}{dt}$. Comme il n'y a pas de transfert de travail mais uniquement du transfert thermique par conduction, on écrira : $\rho c S dx \frac{dT}{dt} = P_{rentre} - P_{sort} + P_{cr}$. Ici, aucun phénomène intérieur au système ne produit de l'énergie thermique : $P_{cr} = 0$. Le bilan énergétique s'écrit donc : $\rho c S dx \frac{dT}{dt} = j_{cond}(x, t)S - j_{cond}(x + dx, t)S$. On obtient facilement $\rho c \frac{dT}{dt} = -\frac{dj_{cond}}{dx}$ qui exprime ici la loi de conservation de l'énergie. En utilisant la loi de FOURIER unidimensionnelle, on arrive facilement à $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$ qui est l'équation de diffusion thermique.

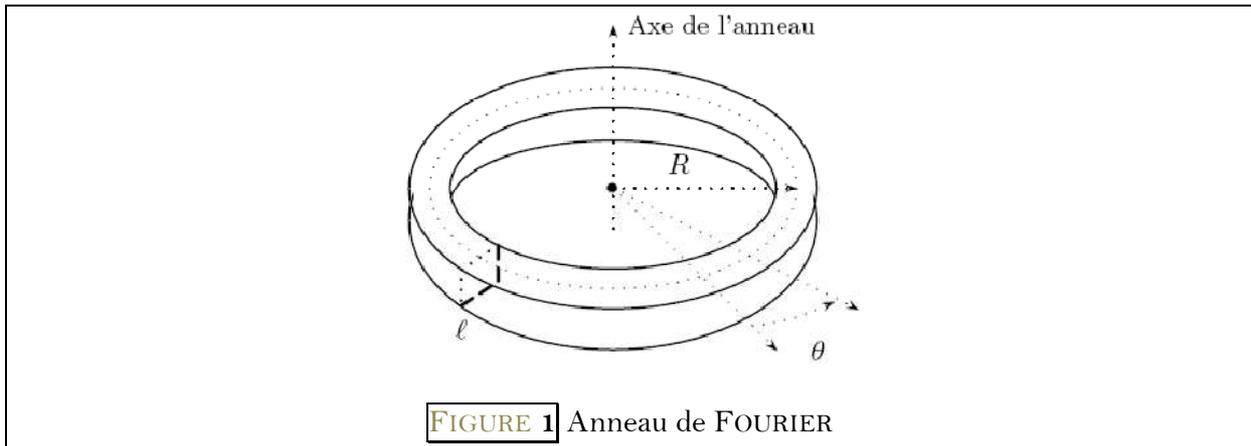
QUESTION 5 En régime dépendant du temps, pour une diffusion thermique sur une distance d , il faut une durée de l'ordre de τ_d . A partir des grandeurs ρ , c , d et λ , construire une grandeur homogène à une durée et donner l'expression de τ_d appelé temps caractéristique de diffusion thermique. Application numérique : calculer pour le fer les temps caractéristiques les temps caractéristiques τ_{d1} , et τ_{d2} pour des extensions spatiales sur les distances $d_1 = 10$ cm et $d_2 = 50$ cm. Commenter ces résultats.

Par analyse dimensionnelle, on peut écrire l'équation de diffusion thermique sous la forme : $\frac{T}{d^2} \equiv \frac{\rho c}{\lambda} \frac{T}{\tau_d}$. On en déduit l'expression du temps caractéristique de diffusion thermique sur une longueur d : $\tau_d = \frac{\rho c d^2}{\lambda}$. Pour $d_1 = 10$ cm, on trouve $\tau_{d1} = 6,5$ min, pour $d_2 = 50$ cm, on a $\tau_{d2} = 2,7$ h. On constate évidemment que la durée caractéristique augmente rapidement avec la distance d , ce qui est logique puisque la loi est en d^2 . Ceci est une signature caractéristique des phénomènes de diffusion thermique.

Partie B Etude du dispositif expérimental utilisé par Joseph FOURIER en 1806

Un des dispositifs expérimentaux utilisés par FOURIER était constitué d'un anneau de fer ayant la forme d'un tore de rayon moyen R et de section carrée de côté ℓ , avec ℓ très

inférieur à R . Plusieurs petites loges remplies de mercure, dans lesquelles plongent des thermomètres, étaient percées en divers endroits de l'anneau représenté sur la FIGURE 1. Sous une section droite de l'anneau, prise pour origine des angles $\theta = 0$, on place un dispositif de chauffage à la distance R de l'axe. On considère que la température est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend que de θ et t . On se limite au domaine où θ est compris entre $-\pi$ et π radians, en remarquant que l'on doit avoir, par raison de symétrie $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$.



On rappelle l'expression du gradient en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

L'anneau est placé dans l'air ambiant de température T_e uniforme et indépendante du temps. Selon la loi de NEWTON, le flux thermique conducto-convectif sortant par l'élément de surface latérale dS_{lat} de l'anneau, et donc cédé à l'air ambiant, vaut $\delta\phi = h(T - T_e)dS_{lat}$ où h est le coefficient de transfert conducto-convectif entre le métal et l'air, que l'on suppose constant, et T la température de la portion d'anneau considérée à l'instant t .

QUESTION 6 En effectuant un bilan enthalpique pour la partie d'anneau située entre les sections repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$ montrer que l'expression aux dérivées partielles dont la température $T(\theta, t)$ est solution est :

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{\ell} (T - T_e) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le volume du système étudié est maintenant $\ell^2 R d\theta$. Il faut faire le bilan de la puissance qui entre à l'abscisse θ par conduction sur la section ℓ^2 , de celle qui sort par conduction en $\theta + d\theta$ sans oublier la puissance qui sort par convection par les quatre surfaces latérales du morceau de solide étudié. Comme l'angle $d\theta$ est infinitésimal, on assimilera la surface totale à 4 fois la même surface. Le rayon R moyen étant grand devant ℓ , on peut dire qu'une des deux dimensions de cette surface est $Rd\theta$. Pour l'autre dimension c'est beaucoup plus simple puisqu'il s'agit de ℓ . La surface latérale totale est donc $dS_{lat} = 4\ell R d\theta$. Le bilan de

puissance s'écrit donc : $\rho c R^2 d\theta \frac{\partial T}{\partial t} = \ell^2 (j_{cond}(\theta, t) - j_{cond}(\theta + d\theta, t)) - 4\ell R d\theta h(T - T_e)$.
On arrive ainsi à $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial j_{cond}}{\partial \theta} - \frac{4h}{\ell} (T - T_e)$. La loi de FOURIER s'exprime ici en fonction de θ : $\vec{j}_{cond} = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$. On peut donc trouver finalement : $\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{\ell} (T - T_e) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$.

Dans la suite de cette partie, on étudie le régime indépendant du temps.

QUESTION 7 Donner la solution de cette équation aux dérivées partielles en régime stationnaire indépendant du temps, sachant que $T = T_c$ pour $\theta = 0$. On introduira la grandeur $a = \sqrt{\frac{\ell \lambda}{4h}}$ dont on précisera la dimension. Afin de déterminer complètement cette solution, on utilisera comme conditions aux limites $T(\theta = 0, t) = T_c$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)_{|\theta|=\pi} = 0$. On expliquera avec soin la cause physique de cette seconde condition aux limites.

Avec la notion a posée par l'énoncé (et en régime indépendant du temps), l'équation différentielle devient : $\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{T}{a^2} = -\frac{T_e}{a^2}$. Avec cette équation, on constate immédiatement que a est une distance. La solution générale de cette équation est $T = T_e + A \exp\left(-\frac{R\theta}{a}\right) + B \exp\left(\frac{R\theta}{a}\right)$. Il faut déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions aux limites. En $\theta = 0$, on a $T = T_c$, cette condition est imposée par le chauffage provoqué. On a donc $T_c = T_e + A + B$. Du fait de la symétrie du problème en θ et $-\theta$, il est logique de dire que le flux thermique de conduction part de puis la position $\theta = 0$ de façon complètement équivalente de chaque côté donc pour $\theta > 0$ comme pour $\theta < 0$. Que se passe-t-il alors en $\theta = \pi$ et $\theta = -\pi$ qui correspond à un seul et même point situé à l'opposé du point de chauffage ? Les flux thermiques se croisent-ils ? C'est bien évidemment impossible puisqu'on sait que le flux thermique est orienté des températures élevées vers les températures faibles. Il n'y a tout simplement pas de flux thermique en $\theta = \pi$ ou $-\pi$. On constate donc qu'il est logique d'avoir $\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)_{|\theta|=\pi} = 0$ puisque le flux thermique est proportionnel à cette dérivée selon la loi de FOURIER. La conséquence de cette condition aux limites est donc : $-\frac{AR}{a} \exp\left(-\frac{R\pi}{a}\right) + \frac{BR}{a} \exp\left(\frac{R\pi}{a}\right) = 0$. Avec ces deux conditions, on peut déterminer les deux constantes d'intégration A et B et après les calculs conclure pour $\theta > 0$ que : $T(\theta) = T_e +$

$$(T_c - T_e) \frac{\text{ch}\left(\frac{R(\pi-\theta)}{a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{R\pi}{a}\right)}$$

QUESTION 8 On se limite au domaine où θ est compris entre 0 et π radians. Un thermomètre 2 est placé dans la section A_2 repérée par l'angle θ_2 ; un thermomètre 1 est placé dans la section A_1 repérée par l'angle $\theta_1 = \theta_2 - \Delta\theta$; enfin, un thermomètre 3 est placé dans la section A_3 repérée par l'angle $\theta_3 = \theta_2 + \Delta\theta$. On pose $\Delta T = T(\theta) - T_e$. D'après FOURIER, le rapport $q = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{\Delta T_2}$ ne dépend que des dimensions ou de la nature de l'anneau et non de la manière dont ce solide est chauffé. Démontrer qu'effectivement ce rapport ne

dépend ni de θ_2 , ni de la température T_c de la section repérée par $\theta = 0$ au-dessous de laquelle on a placé le dispositif de chauffage.

On a donc : $\Delta T_1 = \frac{T_c - T_e}{\text{ch}\left(\frac{R\pi}{a}\right)} \text{ch}\left(\frac{R}{a}(\pi - \theta_2 + \Delta\theta)\right)$. Cette formule s'adapte aussi aux deux autres écarts de température étudiés pour donner : $\Delta T_2 = \frac{T_c - T_e}{\text{ch}\left(\frac{R\pi}{a}\right)} \text{ch}\left(\frac{R}{a}(\pi - \theta_2)\right)$ et $\Delta T_3 = \frac{T_c - T_e}{\text{ch}\left(\frac{R\pi}{a}\right)} \text{ch}\left(\frac{R}{a}(\pi - \theta_2 - \Delta\theta)\right)$. En formant le rapport q proposé et en revenant aux exponentielles pour son expression, on pourra facilement factoriser par $\text{ch}\left(\frac{R\theta_2}{a}\right)$. Une fois les calculs faits, on trouve : $q = 2ch\frac{R\Delta\theta}{a}$. Cette grandeur est bien indépendante de θ_2 et de T_c .

QUESTION 9 Application numérique : calculer le rapport q_{th} trouvé théoriquement pour $\Delta\theta = \frac{\pi}{4}$ en prenant les valeurs du dispositif de FOURIER, soit $R = 16,0$ cm et $\ell = 3,30$ cm.

On trouve avec les valeurs fournies que $a = \sqrt{\frac{\ell\lambda}{4h}} = 0,2585$ m et ensuite $q_{th} = 2,24$.

QUESTION 10 Sur les relevés d'expériences de FOURIER du 31 juillet 1806, on lit que deux heures après le début du chauffage, les valeurs des températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires et que les thermomètres indiquent, par des lectures au tiers de degré près : $17,67$ °C pour l'air ambiant, $66,00$ °C pour $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $50,67$ °C pour $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$ et $44,00$ °C pour $\theta_3 = \pi$. Calculer le temps caractéristique de diffusion thermique τ_d défini à la **QUESTION 5** pour une extension spatiale sur la distance $d = \pi R$ et comparer sa valeur aux deux heures attendues par FOURIER. Calculer le rapport q_{exp} donné par les relevés expérimentaux de FOURIER et comparer à q_{th} .

On a $\tau_d = \frac{\rho c \pi^2 R^2}{\lambda} \approx 3,1$ h pour $\pi R \approx 50$ cm. Avec les valeurs mesurées $\Delta T_1 = 26,33$ °C, $\Delta T_2 = 48,33$ °C et $\Delta T_3 = 86,67$ °C, on trouve alors que : $q_{exp} = 2,26$. En terme d'attente, on constate que FOURIER aurait peut être dû attendre un peu plus longtemps que deux heures puisque $\tau_d \approx 3,1$ h mais que la valeur q_{exp} est tout à fait cohérente avec le modèle théorique retenu.

Partie C Séries de FOURIER

C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph FOURIER découvrit les séries trigonométriques, dites séries de FOURIER. L'anneau de la **FIGURE 1**, chauffé comme précédemment en $\theta = 0$, est ensuite enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température T est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend, comme

précédemment, que de l'angle θ et du temps t . On se limite encore au domaine où θ est compris entre $-\pi$ et π , en remarquant que l'on a $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$ par raison de symétrie.

QUESTION 11 Donner l'équation aux dérivées partielles dont la température $T(\theta, t)$ est solution.

En l'absence de convection, on obtient l'équation suivante :
$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}.$$

QUESTION 12 On cherche une solution particulière de la forme $T_n = A_n + f(\theta)g(t)$ où A_n est une constante et $g(t)$ une fonction qui tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Etablir les équations différentielles vérifiées respectivement par $f(\theta)$ et $g(t)$. On introduira, sans chercher à l'exprimer, une constante arbitraire positive homogène à une distance d_n et l'on posera : $\tau_{d_n} = \frac{\rho c d_n^2}{\lambda}$.

En testant la solution à variables séparées proposée, on aboutit à l'équation : $\frac{\rho c}{\lambda} \frac{dg}{g(t)} = \frac{1}{R^2} \frac{d^2 f}{f(\theta)}$. Cette équation doit être vérifiée $\forall \theta$ et $\forall t$ qui sont deux variables indépendantes. La seule solution possible est que ces deux membres de l'égalité soient égaux à la même constante que nous noterons K . On a donc pour la fonction $g(t)$ l'équation différentielle suivante : $\frac{dg}{dt} - K \frac{\lambda}{\rho c} g(t) = 0$. Cette équation différentielle du premier ordre possède une solution exponentielle qui ne diverge pas lorsque $t \rightarrow \infty$ uniquement dans le cas où $K < 0$. On doit obligatoirement retenir cette hypothèse. Dans ces conditions, l'autre équation différentielle devient : $\frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{|K|}{R^2} f(\theta) = 0$. Les solutions sont alors de forme sinusoïdale, ce qui évite de fait toute divergence. La situation physique est donc correctement décrite avec $K < 0$ où K possède nécessairement la dimension d'une distance au carré, on posera donc $K = -\frac{d_n^2}{\tau_{d_n}}$ comme l'énoncé nous y invite et de façon assez naturelle, $\tau_{d_n} = \frac{\rho c}{\lambda} d_n^2$ le temps caractéristique de diffusion thermique associé à d_n . Les solutions sont de la forme $g(t) = \gamma_n \exp -\frac{t}{\tau_{d_n}}$ et $f(\theta) = \alpha_n \cos \frac{R\theta}{d_n} + \beta_n \sin \frac{R\theta}{d_n}$.

QUESTION 13 Montrer que cette solution particulière se met sous la forme :

$$T_n = A_n + B_n \cos \frac{R\theta}{d_n} \exp -\frac{t}{\tau_{d_n}}$$

Du fait de la parité de la solution en θ , on aura nécessairement $\beta_n = 0$. La forme de la solution sera donc :
$$T_n = A_n + B_n \cos \frac{R\theta}{d_n} \exp -\frac{t}{\tau_{d_n}}.$$

QUESTION 14 A l'instant $t = 0$, la température initiale d'une section repérée par l'angle θ est une fonction $T_0(\theta)$, symétrique, de période 2π et développable en série de FOURIER : $T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta$ où T_m représente la température moyenne de l'anneau et b_n des coefficients supposés connus. Montrer que la solution générale $T(\theta, t)$ peut se mettre sous la forme :

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t)$$

L'équation de diffusion thermique étant une équation linéaire, la somme de solutions de cette équation est aussi solution. A la date $t = 0$, on a $T_n(0) = A_n + B_n \cos \frac{R\theta}{d_n}$. Pour identifier avec la forme proposée, il suffit de poser $T_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, $B_n = b_n$, $\alpha_n = \frac{R}{n}$ et $\tau_{d_n} = \frac{\rho c R^2}{n^2 \lambda}$. La solution la plus générale est alors : $T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t)$ avec

$$T_n(\theta, t) = b_n \cos n\theta \exp - \frac{n^2 \lambda}{\rho c R^2} t.$$

QUESTION 15 Comparer les constantes de temps des différentes harmoniques.

Les temps des différents harmoniques évoluent en $\frac{1}{n^2}$, il y a rapide décroissance. On peut affirmer qu'au bout d'un temps $t > 3\tau_{d_2} = \frac{3\rho c R^2}{4\lambda} \approx 15$ mn, tous les harmoniques autres que le fondamental ($n = 1$) sont totalement atténués.

QUESTION 16 FOURIER constata, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que l'état de l'anneau ne tarde pas à se confondre avec celui pour lequel les écarts de température des différents points par rapport à la moyenne T_m doivent être proportionnels aux cosinus de l'angle qui mesure la distance à l'origine, la disposition initiale n'apportant aucun changement à ces résultats. Commenter cette constatation de FOURIER.

On peut donc au bout d'un quart d'heure proposer la forme de solution suivante : $T(\theta, t) = T_m + b_1 \cos \theta \exp - \frac{\lambda}{\rho c R^2} t$. On notera que $T(\theta, t) - T_m$ est proportionnel à $\cos \theta$ ce qui est conforme aux observations faites par Joseph FOURIER.

