Etude énergétique des systèmes mécaniques

A – Travail d'une force

Le travail d'une force est un transfert d'énergie entre deux systèmes lié à une force dont le point d'application se déplace.

I – Travail d'une force constante

1) Notion de force constante

Une force constante est une force dont la direction, le sens, la valeur restent constants au cours du mouvement.

2) Expression du travail

Le travail d'une force constante au cours d'un déplacement AB est donné par :
$\underset{A \to B}{W}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F.AB.\cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

3) Travail moteur et travail résistant

Travail moteur :
$\underset{A \to B}{W}(\vec{F}) > 0 \; : \; 0 \leq (\vec{F}, \overrightarrow{AB}) < \frac{\pi}{2}$.

Travail résistant :
$\underset{A \to B}{W}(\vec{F}) < 0 \; : \; \frac{\pi}{2} < (\vec{F}, \overrightarrow{AB}) \leq \pi$.

Travail nul :
$\underset{A \to B}{W}(\vec{F}) = 0 \; : \; (\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$.

4) Travail du poids

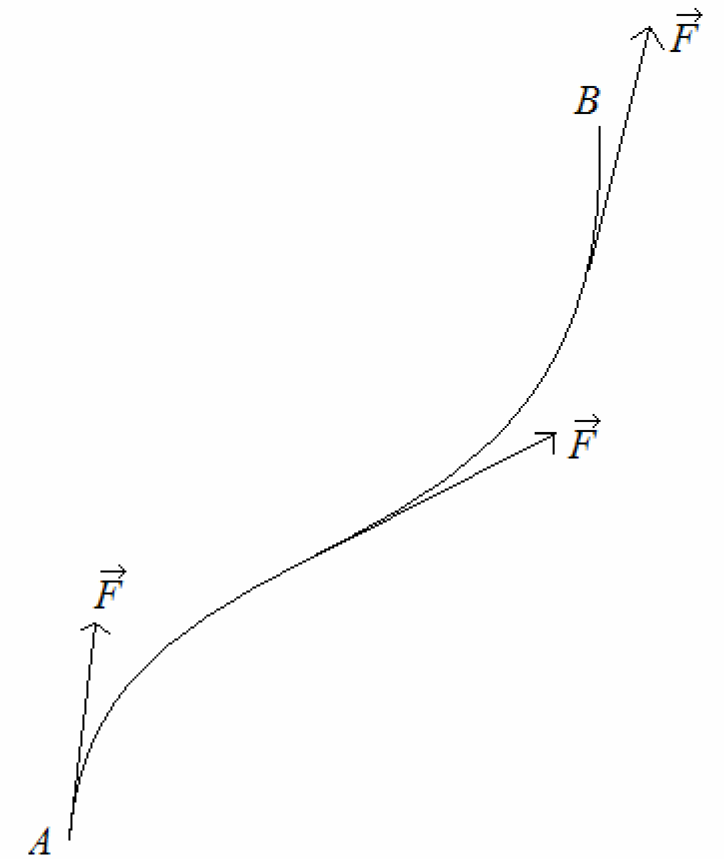
Le travail du poids d'un solide lorsque son centre d'inertie passe de l'altitude z_A à l'altitude z_B est donné par :
$\underset{A \to B}{W}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$.

II – Travail élémentaire d'une force variable

1) Notion de travail élémentaire

La force $\vec{F}$ n'est pas constante sur *AB*, mais on suppose qu'elle reste constante sur un trajet élémentaire $d\vec{l}$ aussi petit que l'on veut. Au cours du trajet $d\vec{l}$, la force effectue un travail élémentaire δW tels que $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$.

2) Expression générale du travail de la force

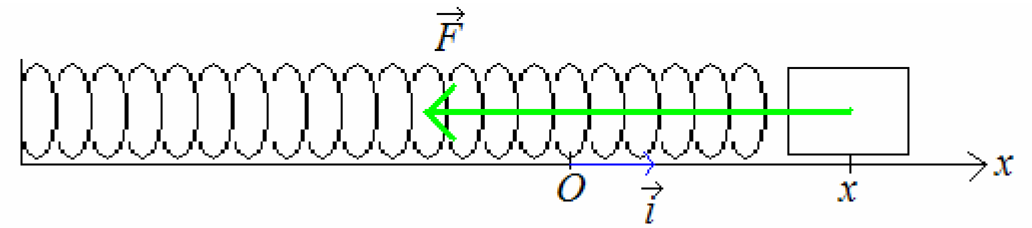


Le travail total effectué par $\vec{F}$ au cours du déplacement *AB* correspond à la somme des travaux élémentaires :

$$\underset{A\to B}{W}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

III – Application au travail de la force exercée sur l'extrémité d'un ressort

1) Force de rappel d'un ressort



$\vec{F}$ est la force de rappel du ressort : $\vec{F} = -kx\vec{i}$.
Soit $\vec{F}'$ la force exercée par l'expérimentateur pour étirer le ressort : $\vec{F}' = -\vec{F} = kx\vec{i}$.

2) Expression du travail élémentaire au cours d'un déplacement élémentaire

Supposons que l'on écarte le centre d'inertie du solide d'un déplacement élémentaire *dx*.
Le centre d'inertie se déplace du trajet élémentaire *dx* : $\delta W = \vec{F}' \cdot d\vec{l}$, $d\vec{l} = dx\vec{i}$.
$\delta W = kx\vec{i} \cdot dx\vec{i} = kxdx\vec{i} \cdot \vec{i}$. Or $\vec{i} \cdot \vec{i} = \left\|\vec{i}\right\|^2 = 1$.
Donc le travail élémentaire effectué par l'expérimentateur au cours du déplacement élémentaire *dx* est $\delta W = kxdx$.

3) Détermination du travail de la force au cours d'un déplacement

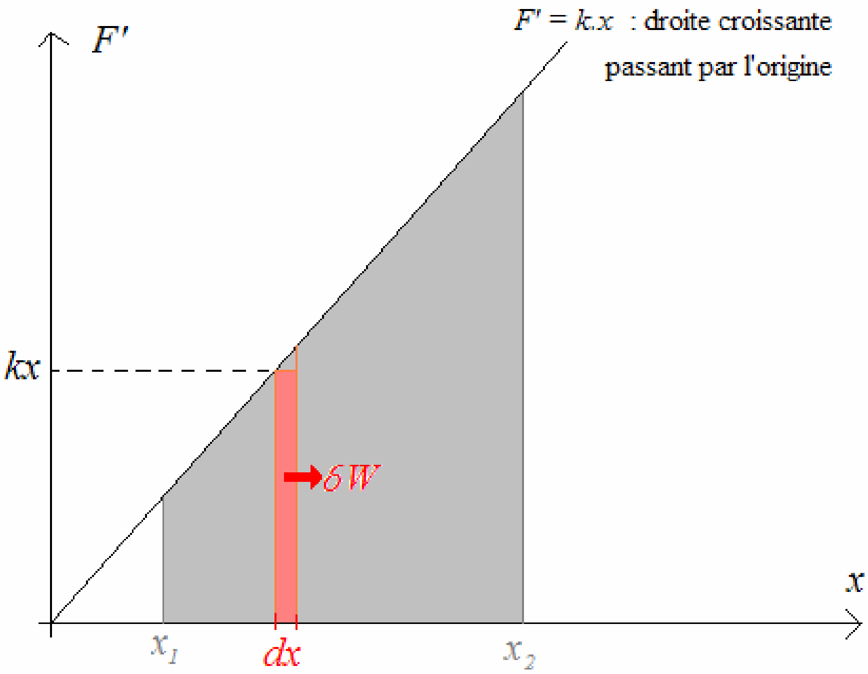
On peut alors déterminer l'expression du travail effectué par cette force pour passer de la position x_1 à la position x_2 par deux méthodes différentes.

a. Par intégration

$$\underset{1\to 2}{W}(\vec{F}') = \int_{x_1}^{x_2} \delta W = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = k\int_{x_1}^{x_2} xdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_2{}^2 - \frac{1}{2}kx_1{}^2.$$

b. Par une méthode graphique

On trace la courbe représentant *F'* en fonction de l'allongement *x* du ressort (supposé positif).
Le travail élémentaire de la force au cours d'un déplacement *dx* représente l'aire sous la courbe.



On peut alors déterminer graphiquement le travail de la force au cours d'un déplacement de x_1 vers x_2.
$\delta W = kxdx$: aire du rectangle de largeur dx et de longueur kx.
Le travail $\underset{1\to 2}{W}(\vec{F}')$ est l'aire sous la courbe comprise entre x_1 et x_2.
Ce travail est égal à l'aire A_2 (du triangle de base x_2) moins l'aire A_1 (du triangle de base x_1).
$A_2 = \frac{1}{2}x_2.kx_2 = \frac{1}{2}kx_2{}^2$.
$A_1 = \frac{1}{2}x_1.kx_1 = \frac{1}{2}kx_1{}^2$.
Donc $\underset{1\to 2}{W}(\vec{F}') = \frac{1}{2}kx_2{}^2 - \frac{1}{2}kx_1{}^2$.

B – Energies des systèmes mécaniques

I – Les formes d'énergies

1) Energie cinétique

Un solide en mouvement de translation (tous les points sont animés du même vecteur vitesse $\vec{V}$) possède l'énergie cinétique :
$E_c = \frac{1}{2}m.V^2$.
Unités : E_c est en joule (J), m est en kilogramme (kg), V est en mètre par seconde (m/s).

2) Energie potentielle

L'énergie potentielle est une forme d'énergie que possède un système du fait de son interaction avec un autre système. Cette énergie peut être transférée sous forme d'énergie ou sous forme de travail.

II – Etude énergétique d'un projectile dans le champ de pesanteur

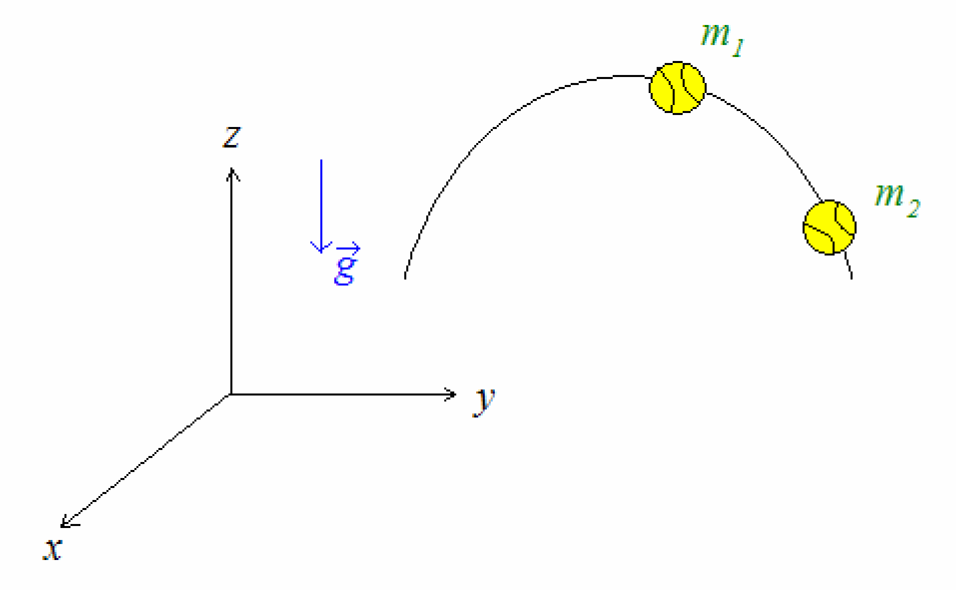
1) Définition et expression de l'énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur d'un système traduit son interaction avec la Terre. La variation d'énergie potentielle de pesanteur entre A et B est égale au travail effectué par un expérimentateur pour ramener le système de la position A à la position B.
$\underset{A\to B}{\Delta} E_{pp} = \underset{A\to B}{W}(\vec{F})$. Or $\underset{A\to B}{W}(\vec{F}) = -\underset{A\to B}{W}(\vec{P})$. Donc $\underset{A\to B}{\Delta} E_{pp} = -\underset{A\to B}{W}(\vec{P}) = -mg(z_A - z_B)$,
$\underset{A\to B}{\Delta} E_{pp} = mgz_B - mgz_A$. Or $\underset{A\to B}{\Delta} E_{pp} = E_{pp_B} - E_{pp_A}$.
Donc $E_{pp_B} - E_{pp_A} = mgz_B - mgz_A$.
D'où par identification : $E_{pp} = mgz$.

2) Variation d'énergie mécanique

Un projectile en mouvement possède de l'énergie cinétique, et, comme il se déplace dans un champ de pesanteur, il possède aussi de l'énergie potentielle de pesanteur. Etudions son énergie mécanique.

L'énergie mécanique du projectile est : $E_M = E_c + E_{pp}$, soit $E_M = \frac{1}{2}m.V^2 + m.g.z$.



Exprimons la variation de l'énergie mécanique entre deux positions :

$$\Delta E_M = E_M(z_2) - E_M(z_1) = \frac{1}{2}m.V_2{}^2 + m.g.z_2 - \frac{1}{2}m.V_1{}^2 - m.g.z_1$$

$$\Delta E_M = \Delta E_c + m.g(z_2 - z_1).$$

Or, d'après le théorème de l'énergie cinétique, la variation d'énergie cinétique d'un solide dans un référentiel galiléen est égale à la somme des travaux des forces appliquées au solide, soit :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}).$$

Ainsi, pour un projectile se déplaçant entre deux positions z_1 et z_2, la variation d'énergie mécanique vaut :

$$\Delta E_M = \sum W(\vec{F}) + m.g(z_1 - z_2).$$

Explicitons cette relation.

a. En absence de frottements (chute libre)

La seule force qui agit sur le projectile est le poids. Son travail est :

$$W(\vec{P}) = m.g(z_1 - z_2).$$

Or, $\Delta E_c = W(\vec{P})$, d'après le théorème de l'énergie cinétique, et $\Delta E_M = W(\vec{P}) + m.g(z_1 - z_2) = 0$, d'où E_M est constante.

En absence de frottement, l'énergie mécanique d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme est constante :

$$E_M = m.g.z + \frac{1}{2}m.V^2 = \text{cte}.$$

b. En présence de frottements

Il faut prendre en compte les forces de frottements qui effectuent un travail $W(\vec{F}_f)$:

$\sum W(\vec{F}) = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_f)$.

D'où, d'après $\Delta E_M = \sum W(\vec{F}) + m.g(z_1 - z_2)$:

$\Delta E_M = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_f) + m.g(z_1 - z_2)$, soit : $\Delta E_M = W(\vec{F}_f)$.

ΔE_M est négatif car $W(\vec{F}_f)$ est un travail résistant.

En présence de frottements, l'énergie mécanique d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme diminue, car sa variation est égale au travail résistant des forces de frottement : $\Delta E_M = W(\vec{F}_f)$.

Dans ce cas, la perte d'énergie mécanique se trouve généralement convertie en chaleur transférée à l'air ambiant et à la surface du projectile.

On cherche le plus souvent à limiter ces pertes en donnant aux projectiles des formes aérodynamiques.

En revanche, on exploite ces forces de frottements pour ralentir le retour sur Terre des capsules spatiales ; on doit alors les munir de boucliers spéciaux en matériaux réfractaires.

III – Etude énergétique d'un système {solide ; ressort}

1) Définition et expression de l'énergie potentielle élastique

Lors du travail effectué par l'expérimentateur pour amener le système {solide ; ressort} de la position x_1 à la position x_2, il y a transfert d'énergie :

$\underset{1\to 2}{\Delta} E_{pe} = \underset{1\to 2}{W}(\vec{F}') = \frac{1}{2}kx_2{}^2 - \frac{1}{2}kx_1{}^2$. Or $\underset{1\to 2}{\Delta} E_{pe} = E_{pe_2} - E_{pe_1}$.

Donc $E_{pe_2} - E_{pe_1} = \frac{1}{2}kx_2{}^2 - \frac{1}{2}kx_1{}^2$.

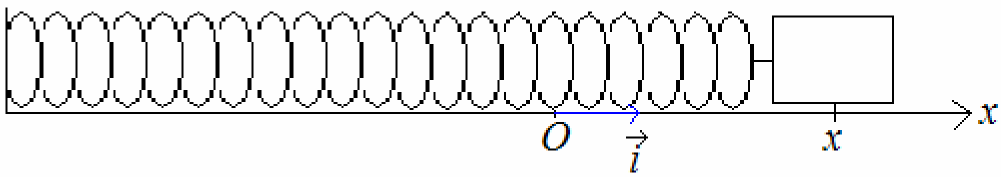
D'où par identification $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$

2) Variation d'énergie mécanique

a. Le système {solide ; ressort} non amorti

Dispositif expérimental :

On considère le dispositif schématisé sur la figure ci-dessous. Le solide a été écarté de sa position d'équilibre. Il peut se déplacer sans frottement sur l'axe *Ox*.



Etablissement de l'équation différentielle du mouvement du solide :

D'après la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m.\vec{a}_G$, $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$.

Par projection suivant l'axe Ox : $0 + 0 - F = m.a_x$ donc $-k.x = m.a_x$.

Or $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt}$ donc $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ et $\vec{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $v_x = \dfrac{dx}{dt}$; donc $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.

On a donc $-k.x = m.\ddot{x} = m.\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $m.\ddot{x} + k.x = 0$.

D'où l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}.x = 0$ ou $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}.x = 0$.

Solution générale :

La solution générale est de la forme : $x(t) = X_m.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$.

Avec :

- X_m : amplitude maximale des oscillations : abscisse maximale atteinte par le système.
- T_0 : période propre de l'oscillateur.
- φ : phase à l'origine des dates (constante qui dépend des conditions initiales.

Détermination de l'expression de la période propre de l'oscillateur :

On injecte $x(t)$ dans l'équation différentielle $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}.x = 0$.

$$x(t) = X_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right).$$

$$\dot{x}(t) = v_x(t) = -X_m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right).$$

$$\ddot{x}(t) = a_x(t) = -X_m.\frac{4\pi^2}{T_0{}^2}.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right).$$

Donc $-X_m.\dfrac{4\pi^2}{T_0}.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \dfrac{k}{m}.X_m.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = 0$.

$$X_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\left[-\frac{4\pi^2}{T_0{}^2} + \frac{k}{m}\right] = 0.$$

Cette équation est vérifiée à toutes les dates, comme $x = X_m.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \neq 0$. Donc $-\dfrac{4\pi^2}{T_0{}^2} + \dfrac{k}{m} = 0$, d'où $\dfrac{4\pi^2}{T_0{}^2} = \dfrac{k}{m}$ d'où $T_0{}^2 = 4\pi^2\dfrac{m}{k}$.

Donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Energie potentielle du système {solide ; ressort} :
Le mouvement étant horizontal, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle de pesanteur. On choisit alors $E_{pp} = 0\text{J}$ au centre d'inertie du système.

L'énergie potentielle est sous forme élastique : $E_{pe} = \dfrac{1}{2}kx^2$.

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k.X_m{}^2.\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right).$$

Energie cinétique du système {solide ; ressort} :

$E_c = \dfrac{1}{2}m.v_x{}^2 = \dfrac{1}{2}m.(\dot{x})^2$ car $v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$ or $\dot{x}(t) = -X_m.\dfrac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

D'où l'énergie cinétique : $E_c = \dfrac{1}{2}m.X_m{}^2.\dfrac{4\pi^2}{T_0{}^2}.\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

$E_c = \dfrac{1}{2}m.X_m{}^2.\dfrac{k}{m}.\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ donc $E_c = \dfrac{1}{2}X_m{}^2.k.\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$.

Expression de l'énergie mécanique :
Par définition : $E_M = E_c + E_p$.

$$E_M = \frac{1}{2}.X_m{}^2.k.\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \frac{1}{2}.k.X_m{}^2.\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right).$$

$$E_M = \frac{1}{2}.k.X_m{}^2.\left[\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right].$$

$$E_M = \frac{1}{2}.k.X_m{}^2.$$

E_M est donc indépendante du temps, elle est conservée : $\Delta E_M = 0\text{J}$.

Interprétation : conversion d'énergie :
$\Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p$ or $\Delta E_M = 0$ alors $\Delta E_c = -\Delta E_p$.

Détermination de l'amplitude maximale des oscillations et de la phase à l'origine des dates :
Expérience : $x(0) = X_0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Théorie : $x(0) = X_m.\cos\varphi$, $\dot{x}(0) = -X_m.\dfrac{2\pi}{T_0}.\sin\varphi$.

On a donc : $X_m.\cos\varphi = X_0$ et $-X_m.\dfrac{2\pi}{T_0}.\sin\varphi = 0$. Donc $\sin\varphi = 0$ car $X_m \neq 0$ et $\dfrac{2\pi}{T_0} \neq 0$. Donc $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.

Or $X_0 > 0$ et $X_m > 0$ donc $\cos\varphi > 0$ donc $\varphi = 0$ et donc $X_m = X_0$.

Expression de l'énergie mécanique à la date $t = 0$ s **:**

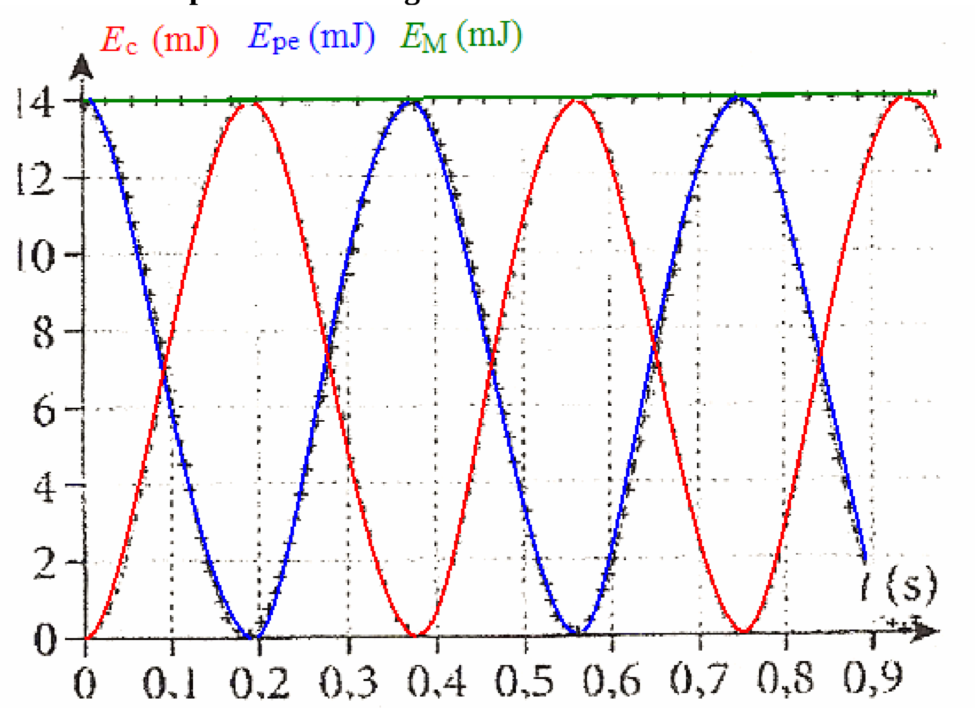
$E_{M_0} = E_{c_0} + E_{p_0}$. Or $v(0) = 0$ donc $E_c(0) = 0$ donc $E_{M_0} = E_{p_0} = \frac{1}{2}k.X_0{}^2$.

Expression de la vitesse du solide à la position d'équilibre :

Par conservation de l'énergie mécanique : $E_{M_0} = E_{M_E}$ or $E_{M_E} = E_{c_E} + E_{p_E}$ et $E_p = \frac{1}{2}k.x^2$.

Dans la position d'équilibre $x_E = 0$ donc $E_{p_E} = 0$. Donc $E_{M_E} = E_{c_E}$. Donc $E_{M_0} = E_{M_E}$. Donc $\frac{1}{2}k.X_0{}^2 = \frac{1}{2}m.v_E{}^2$. D'où $v_E = X_0\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Evolution temporelle des énergies :



b. Le système {solide ; ressort} amorti

On renouvelle l'expérience, mais avec des frottements. On enregistre la position du centre d'inertie du mobile au cours du temps. Puis à l'aide d'un logiciel de traitement de données on trace l'évolution des énergies cinétique, potentielle élastique, et mécanique.

A cause du travail résistant des forces de frottement, l'énergie mécanique de l'oscillateur amorti diminue en permanence au cours des oscillations.

La diminution d'énergie mécanique est égale à la valeur absolue du travail des forces résistantes :

$E_{M_1} - E_{M_2} = \left|W_{1\to 2}(\vec{F}_f)\right|$.

Evolution temporelle des énergies :