Chapitre 1

Décomposition d'un signal en série de FOURIER

1 Les signaux périodiques

DEFINITION *1.* 1 Signal périodique

Un signal $s(t)$ est dit périodique s'il existe un nombre T tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad s(t+T) = s(t)$$

DEFINITION *1.* 2 Période

On appelle période du signal $s(t)$ la plus petite valeur T_0 de T qui assure l'égalité précédente.

REMARQUE *1.* 3

Un signal périodique, de période T_0, vérifie :

$$s(t+nT_0) = s(t)\ \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}$$

DEFINITION *1.* 4 Pulsation d'un signal périodique

La pulsation d'un signal périodique, de période T_0, est définie par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}\ (\omega \text{ en Hz et } T_0 \text{ en s})$$

DEFINITIONS *1.* 5 Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne d'un signal périodique $s(t)$, sur une période T_0, se calcule par :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0} s(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} s(t)\mathrm{d}t$$

Sa valeur efficace vaut :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}$$

2 Série de FOURIER

DEFINITION 2. 1 Série de FOURIER associée à un signal périodique

A un signal périodique $s(t)$, de période T_0, on associe une série de FOURIER :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 T) \text{ où } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

dans laquelle les coefficients a_i et b_i se calculent à l'aide des intégrales :

$$a_0 = \langle s \rangle = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} s(t)\mathrm{d}t$$

$$a_{n\neq 0} = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} s(t) \cos(n\omega_0 T)\, \mathrm{d}t$$

$$b_{n\neq 0} = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} s(t) \sin(n\omega_0 T)\, \mathrm{d}t$$

THEOREME 2. 2 Théorème de FOURIER

En tout point où $s(t)$ est continu :

$$s(t) = S(t)$$

Si $s(t)$ est discontinu en $t = \tau$:

$$S(\tau) = \frac{1}{2}\left[\lim_{t\to\tau^-} s(t) + \lim_{t\to\tau^+} s(t)\right]$$

EXEMPLE 2. 3

On considère la somme :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos[(2p+1)\omega t] = \sum_{p=0}^{\infty} f_p(t)$$

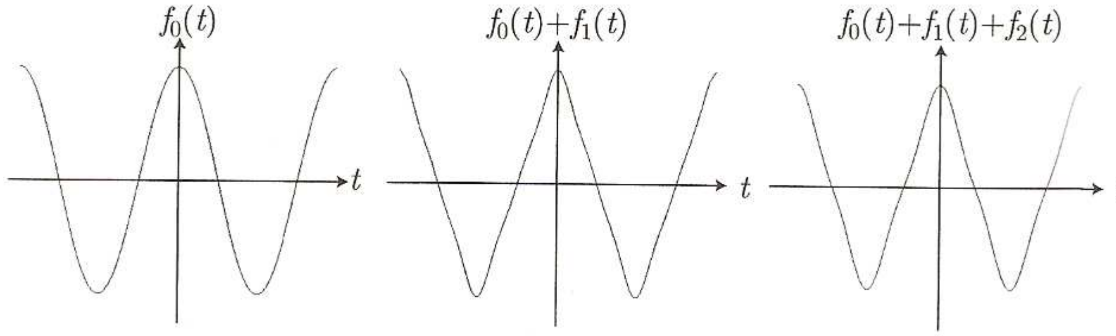

FIGURE 1

Ces représentations graphiques révèlent que la superposition des signaux $f_0(t)$, $f_1(t)$,… permet de générer une fonction $f(t)$ périodique, de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{\pi^2}{8}\left(1 - \frac{4t}{T_0}\right) \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right] \\ f(t) = \frac{\pi^2}{8}\left(1 + \frac{4t}{T_0}\right) \text{ pour } t \in \left[-\frac{T_0}{2}, 0\right] \end{cases}$$

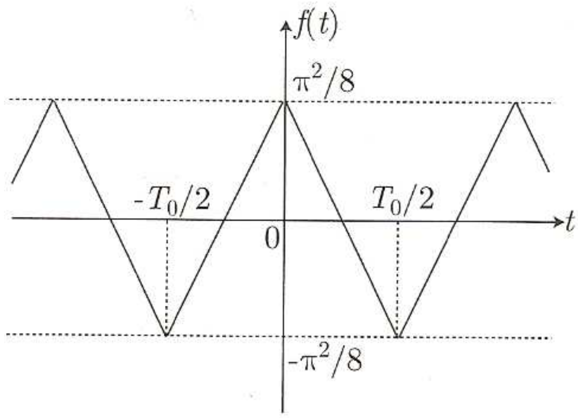

FIGURE 2

DEFINITION 2.4 Fondamental, harmoniques

Dans la série de FOURIER :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 T)$$

le terme d'ordre 1 : $a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t)$ est appelé terme fondamental, tandis que les termes d'ordre $n > 1$ sont appelés harmoniques de rang n.

3 Propriétés

PROPRIETES 3.1

Si la fonction $s(t)$ est paire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0 \text{ car } s(t) = s(-t)$$

alors que si $s(t)$ est impaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \text{ car } s(-t) = -s(t)$$

FORMULE 3.2 Formule de PARCEVAL

On pourra également utiliser la formule de PARCEVAL en vue de calculer la valeur efficace S_{eff} d'un signal $s(t)$ périodique et continu :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} \text{ avec } \langle s^2 \rangle = \frac{1}{T_0}\int_t^{t+T_0} s^2(t)\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

4 Décomposition des signaux usuels

4.1 La fonction créneaux

DEFINITION 4.1.1 Fonction créneaux

La fonction créneaux est définie par :

$$\begin{cases} s(t) = a \text{ pour } 0 \leq t < \dfrac{T_0}{2} \\ s(t) = -a \text{ pour } \dfrac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

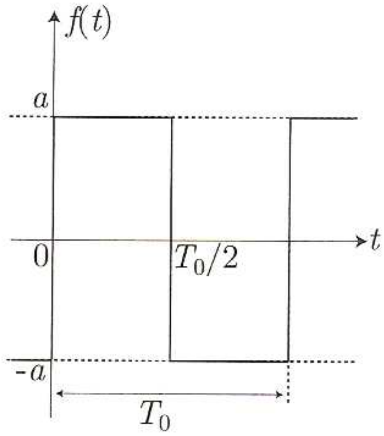

FIGURE 3

PROPRIETE 4.1. 2

Ce signal a pour série de FOURIER (avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$) :

$$S(t) = \frac{4a}{\pi} \sum_{\pi=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)\omega_0 t]$$

4.2 La fonction dents de scie

DEFINITION 4.2.1 Fonction dents de scie

La fonction dents de scie est définie par :

$$\begin{cases} s(t) = a - \dfrac{4a}{T_0} \times t \text{ pour } t \in \left[0, \dfrac{T_0}{2}\right] \\ s(t) = a + \dfrac{4a}{T_0} \times t \text{ pour } t \in \left[-\dfrac{T_0}{2}, 0\right] \end{cases}$$

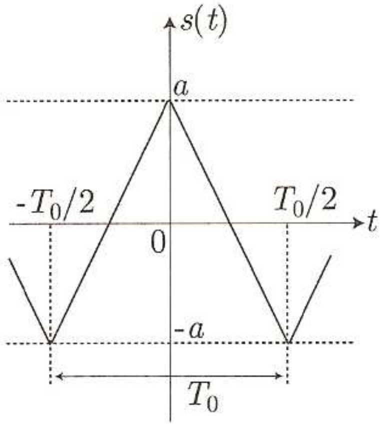

FIGURE 4

PROPRIETE 4.2.2

Ce signal admet pour série de FOURIER (avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$) :

$$S(t) = \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos[(2n+1)\omega_0 t]$$

5 Spectre en fréquence d'un signal

PROPRIETES 5. 1

Lorsque le signal périodique $s(t)$ est continu, le théorème de FOURIER stipule que :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]$$

où :

$$a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin(n\omega t)\right]$$

c'est-à-dire, en posant :

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\cos\phi_n = \frac{a_n}{c_n}$$

$$\sin\phi_n = \frac{b_n}{c_n}$$

on obtient :

$$a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) = c_n[\cos\phi_n\cos(\omega t) + \sin\phi_n\sin(n\omega t) = c_n\cos(n\omega t - \phi_n)$$

d'où il s'ensuit que :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega t - \phi_n)$$

DEFINITION 5. 2 Spectre en fréquences

On appelle spectre en fréquence du signal $s(t)$ le diagramme en bâtons figurant c_n pour chaque valeur de n.

REMARQUE *5. 3*

Pour un signal physique réalisable :

$$\exists k \in \mathbb{N}^* | c_n = 0 \ \forall n > k$$

ce qui rend compte de l'impossibilité matérielle de générer des signaux de fréquence aussi grande que souhaitée.

❖ ❖ ❖